

## Übung zur Vorlesung Graphentheorie

### Blatt 10

46. (a) Bestimme die Gallai-Edmonds Zerlegung von  $C_n$  ( $n \geq 3$ ). (1P)
- (b) Beweise die Aussage (a) des Gallai-Edmonds Struktursatzes, zeige also:  
 $\forall v \in A_G : D_{G-v} = D_G \wedge C_{G-v} = C_G \wedge A_{G-v} = A_G - v$  (10P)
47. (a) Zeige, daß für alle Graphen  $G$  gilt:  $\chi(G) \leq 1 + \max_{G' \triangleleft G} \delta(G')$ , wobei  $G' \triangleleft G$  bedeutet, daß  $G'$  ein induzierter Teilgraph von  $G$  sei. (5P)
- (b) Zeige, daß für alle Graphen  $G$  mit Gradsequenz  $(d_i)$  nicht-aufsteigend geordnet gilt:  
 $\chi(G) \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$  (3P)
- (c) Für alle Graphen  $G$  wurde in der Vorlesung  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$  mittels Greedy gezeigt. Zeige die Aussage nun ohne Greedy mittels folgender Färbungsstrategie: Wir ordnen die Gradsequenz von  $G$  nicht-aufsteigend und weisen den zugehörigen Knoten in dieser Reihenfolge eine minimale Farbe zu, um eine Knotenfärbung zu erhalten. (1P)
48. Zeige:
- (a)  $K_{2n}$  hat chromatischen Index  $\chi' = \Delta = 2n - 1$ . (1P)
- (b)  $K_{2n-1}$  hat chromatischen Index  $\chi' = \Delta + 1 = 2n - 1$ . (9P)
49. (a) Sei  $G$  zshgd, 3-regulär und 3-kantenfärbbar mit Farben  $c_1, c_2, c_3$ . Sei  $F$  eine Kanten-schnittmenge (d.h.,  $F \subset E(G)$ ) sei eine inklusionsminimale Menge an Kanten, so daß  $\kappa(G - F) > \kappa(G)$ . Zeige:  
Die Anzahlen der mit jeweils  $c_i$  gefärbten Kanten in  $F$  sind entweder alle gerade oder ungerade. (3P)
- (b) Zeige: Ein 3-regulärer Graph mit Brücke hat chromatischen Index 4. (3P)
50. (a) Zeige, daß die Kantenmenge eines bipartiten Graphen  $G$  in  $\Delta(G)$  Matchings zerlegbar ist. (6P)
- (b) Zeige, mittels (a), daß für diesen Graph  $G$  gilt:  $\chi'(G) = \Delta(G)$  (1P)