

## Übung zur Vorlesung Graphentheorie

### Blatt 1

#### Allgemeine Hinweise:

Die Übungen finden mittwochs um 11:45h - 13:15h und um 17:00h - 18:30h jeweils im HS 301 im Pohlighaus statt. Abgaben dürfen in Zweiergruppen erfolgen. (Bitte die Abgaben entsprechend kennzeichnen.) Abgabetermin (sofern nicht explizit anders erwähnt) ist jeweils mittwochs nach der Vorlesung (11:45 Uhr) entweder im Fach 12 des Briefkastens im Pohlighaus (unbedingt **Übung Graphentheorie** draufschreiben!) oder persönlich. Später eingefundene Abgaben werden zwar korrigiert aber aus Gründen der Fairness nicht bepunktet. Eine Abgabe per email ist nicht möglich.

Die Klausur findet aller Voraussicht nach am 08.02.2006 um 10:15h statt und umfaßt 2 Stunden. Etwa 3 Wochen später wird eine Nachklausur angeboten. Im Laufe des Semesters wird um eine Klausuranmeldung gebeten werden. Dazu informieren wir Sie rechtzeitig. Teilnahme an der Nachklausur ist nur gestattet für Studenten, die die erste nicht bestanden oder nicht an dieser teilgenommen haben.

Bonusregelung: Mit 100% erworbenen Übungspunkten können 20% der Klausurpunkte gewonnen werden. Bei einem Teilerwerb der Übungspunkte wird entsprechend linear skaliert und aufgerundet.

\*-Aufgaben sind bepunktete Bonusaufgaben. Nichtbearbeitung wird nicht benachteiligt, da diese Punkte nicht für das Erreichen der 100% Übungspunkte notwendig sind. (Der Klausurbonus ist jedoch auf 20% begrenzt, auch wenn man rechnerisch mehr als 100% Übungspunkte erreichen könnte.) Wenn Sie diese Sätze verstanden haben, sollte Ihnen auch die dahinterliegende simple mathematische Formel klar sein.

#### Weitere Anmerkungen:

1. Ihre Antworten zu Übungsfragestellungen stellen Behauptungen dar, die formell bewiesen oder zumindest gut begründet werden müssen.
2. Wenn nicht weiter spezifiziert, ist unter einem Graphen ein einfacher, ungerichteter Graph zu verstehen.

#### Aufgaben:

1. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $|V| = n$  und  $\forall v \in V \quad d(v) = 2$ , also  $G$  sei 2-regulär.
  - (a) Wieviele Kanten hat der Graph? (Zeige dies ohne Benutzung des Handschlagslemmas.)  
(2P)
  - (b) Sei  $C_k = (V', E')$  mit  $|V'| = k$  und  $E' = \{(v_i, v_{i+1}) | 1 \leq i \leq k - 1\} \cup \{(v_k, v_1)\}$  ein Kreis. Unter welchen Voraussetzungen ist  $G$  isomorph zu  $C$ ?  
(2P)

(c) Sei  $H = (V', E')$  ein 2-regulärer Graph mit  $|V'| = l$ .

i. Seien  $G$  und  $H$  je zshgd, unter welchen Voraussetzungen sind diese isomorph zueinander?

(2P)

ii. Wenn nun  $G$  und  $H$  je unzshgd sind, wann sind diese isomorph zueinander?

(2P)

**Definition:** Zwei Graphen  $G, G'$  heißen homomorph, falls zwei Abb.  $\Phi : V(G) \rightarrow V(G')$  und  $\Theta : E(G) \rightarrow E(G')$  ex., für die gilt:

$$\forall e \in E(G) : e = (u, v) \text{ mit } u, v \in V(G) \Rightarrow \Theta(e) = (\Phi(u), \Phi(v))$$

iii. Sei  $H$  zshgd. Unter welchen Voraussetzungen ex. kein Homomorphismus von  $G$  nach  $H$ .

(2P)

(d) Betrachte wieder den Kreis  $C_k$  mit der Knotenmenge  $V(C_k) = \{1, \dots, k\}$  und  $H = K_2$  mit Knotenmenge  $V(K_2) = \{0, 1\}$ . Unter welchen Voraussetzungen ist die Abb.  $\Phi : V(C_k) \rightarrow V(K_2)$  mit  $\Phi(x) = x \bmod 2$  (und Abb.  $\Theta : E(C_k) \rightarrow E(K_2)$ ) ein Homomorphismus?

(2P)

2. Zeige mit alternativem Beweis zu dem in der Vorlesung gezeigten, daß jeder Baum (bestehend aus mind. 2 Knoten) mind. 2 Blätter hat.

(5P)

3. Zeige:

$G = (V, E)$  ist ein Baum  $\Leftrightarrow$  Für alle  $u, v \in V$  ex. ein eindeutiger Weg von  $u$  nach  $v$ .

(5P)

4. Sei  $G = (V, E)$  ein zshgder, **unvollständiger** Graph. Zeige:

$\exists u, v, w \in V$ , mit  $u, v, w$  jeweils verschieden und es gilt:  $(u, v), (v, w) \in E$  und  $(u, w) \notin E$

(8P)

\*5. **Definition:** Ein Graph  $G = (V, E)$  ist zweifach zshgd, wenn es für jedes Knotenpaar  $u, v$  des Graphen mind. zwei verschiedene kantendisjunkte Wege von  $u$  nach  $v$  gibt.

Sei  $G$  zweifach zshgd. Zeige:

$G$  ist ein Kreis oder ein vollständiger Graph  $\Leftrightarrow$  Für alle  $u, v \in V(G)$  mit Abstand  $d(u, v) = 2$  ist  $G - \{u, v\}$  unzshgd.

(10P)

Abgabe für **dieses** Übungsblatt bis Fr 04.11.2005, 12:00h.

Achtung: Das zweite Übungsblatt wird in Kürze ins Netz gestellt werden. Für jenes werden Sie 5 Tage länger Zeit zum Lösen haben.