

Übung zur Vorlesung Algorithmen für netzwerkgekoppelte Systeme

Blatt 5

1. Seien $f_{(a,b,c,d)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Funktionen von der Form $f_{(a,b,c,d)}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ wobei $ad - bc \neq 0$ sei. Zeigen Sie, dass die Menge dieser Abbildungen bezüglich der Verkettung (= Hintereinanderausführung) eine Gruppe bildet mit der Identitätsabbildung $f_{(1,0,0,1)}$ als neutralem Element. (4 Punkte)
2. Sei ein Binärbaum T mit $n \in \mathbb{N}$ Blättern gegeben (\mathbb{E} sei n eine Zweierpotenz), die zu Beginn alle markiert seien. Betrachten Sie folgende modifizierte Aktionsfolge des Markierungsspiels $F_2 = (\text{Markiere}, \text{Aktiviere}, \text{Komprimiere}, \text{Komprimiere})$ und zeigen Sie damit, dass nach $k \in \mathbb{N}_0$ Runden des Markierungsspiels für alle Knoten $v \in V(T)$: $\text{anzahl}(v) \leq 2^k$ gilt: v ist markiert. (5 Punkte)
3. Sei eine Folge $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ verschiedener, absteigend sortierter Zahlen gegeben und sei $P = \{z_i := (x_i, x_i^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine daraus konstruierte Punktmenge in der Ebene. Zeigen Sie, dass dann stets gilt $\text{CH}(P) = P$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $x \rightarrow x^2$, $x \in \mathbb{R}$, eine strikt konvexe Funktion ist, d.h.: $\forall \lambda \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R} : f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ und damit weiter, dass jeder Parabelausschnitt zu einer konvexen Menge M , Anlass gibt, d.h.: $\forall \lambda \in [0, 1], x, y \in M : \lambda x + (1-\lambda)y \in M$.) (5 Punkte)
4. Es seien abstrakt Probleme $\Pi_i, i = 1, 2$, gegeben. Dann sagen wir Problem Π_1 ist *reduzierbar* auf Problem Π_2 in Zeit $\tau(n)$ genau dann, falls eine beliebige Eingabeinstanz $I_1, |I_1| = n$, zu Problem Π_1 mit Zeitaufwand $\tau_1(n)$ in eine Eingabeinstanz I_2 zu Π_2 transformiert werden kann, und eine Lösung $O_2(I_2)$ mit Zeitaufwand $\tau_2(n)$ in eine Lösung $O_1(I_1)$ überführt werden kann mit $\tau_1(n) + \tau_2(n) = \tau(n)$. Zeigen Sie, dass in diesem Zusammenhang folgende Aussage gilt: Habe Π_1 die untere Zeitschranke $a(n)$ und sei Π_1 auf Π_2 reduzierbar in Zeit $\tau(n)$, dann gilt für den Zeitaufwand $b(n)$ von Π_2 : $b \in \Omega(a(n) - \tau(n))$. (3 Punkte)
5. Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge in der Ebene. Zeigen Sie unter Verwendung der beiden vorherigen Aufgaben explizit, dass der Zeitaufwand zur Berechnung $\text{CH}(P)$ in $\Omega(|P| \log |P|)$ liegt. (5 Punkte)
6. Beschreiben Sie ausführlich einen parallelen Algorithmus zur Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge in der Ebene und verifizieren Sie damit, dass gilt $\text{KonvexeHuelle} \in \text{CREW}(n, \log^2 n)$. (Gehen Sie dabei von Input-Punkt Mengen aus, deren Kardinalität eine Zweierpotenz sei und deren Elemente paarweise verschiedene x, y -Koordinatenwerte haben.) (8 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen erfolgt am 1.12.2005 bis 12.00 Uhr in den Briefkasten mit der Aufschrift **Übung - Algorithmen für netzwerkgekoppelte Systeme** im Erdgeschoss des Pohligshauses (Pohligstr.1). Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in der Übungsstunde am 8.12.2005.