

Übung zur Vorlesung Algorithmen für netzwerkgekoppelte Systeme

Blatt 11

1. Konstruieren Sie einen Algorithmus, der auf einem eindimensionalen linearen N -Prozessorarray für Inputfolgen $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, die Prefixsummen berechnet derart, dass initial Prozessor i die Zahl a_i und terminal $\sum_{j=1}^i a_j$ hält. Zeigen Sie, dass dies in N Schritten erledigt werden kann. (6 Punkte)
2. Sei nun ein zweidimensionales $N^{1/2} \times N^{1/2}$ -Prozessorgitter gegeben mit $1 < N^{1/2} \in \mathbb{N}$. Die Prozessoren seien zeilenweise von links nach rechts aufsteigend von 1 in Position $(1, 1)$ bis N in Position $(N^{1/2}, N^{1/2})$ durchnummeriert. Konstruieren Sie einen Algorithmus zur Prefixsummenberechnung einer Inputfolge $a = (a_1, \dots, a_N)$ derart, dass initial Prozessor i die Zahl a_i und terminal das Ergebnis $\sum_{j=1}^i a_j$ hält ($1 \leq i \leq N$). Zeigen Sie, dass die Berechnung in $3N^{1/2} + 2$ Zeitschritten erfolgen kann. (7 Punkte)
3. Sei HC_d , $d \in \mathbb{N}$, ein d -dimensionaler Hypercube. Es sei eine Folge $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $n = 2^d$, gegeben derart, dass Prozessor p_i , $0 \leq i \leq n-1$, des Hypercubes das Element a_i hält. Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Summe der Inputfolge, so dass diese nach Zeit $O(\log n)$ bei Prozessor p_0 vorliegt. Geben Sie dazu an, welche Transport- und Additionsvorgänge stattfinden; verifizieren Sie die Laufzeitschranke und die Korrektheit. Geben Sie die Arbeitsschritte des Algorithmus für den Spezialfall $d = 3$ explizit an. (6 Punkte)
4. Zeigen Sie
 - a) geometrisch, dass $\sum_{r=0}^7 \omega_8^{2^r} = 0$, (2 Punkte)
 - b) per vollständiger Induktion, dass die FFT-Berechnung im \mathbb{C}^n , für $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, gemäss der in der Vorlesung angegebenen Prozedur FFT_rekursiv Laufzeit $O(n \log n)$ hat, (2 Punkte)
 - c) dass π_{BRP}^k eine wohldefinierte Permutation auf $M_k := \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ ist, für $k \in \mathbb{N}$. (1 Punkt)
5. Führen Sie die Berechnung der FFT im \mathbb{C}^{16} am $BF(4)$ von Hand durch, indem Sie die Zerlegung eines Inputvektors $x \in \mathbb{C}^{16}$ berechnen und sodann die jeweiligen Zwischenwerte an den Knoten der nächst-unteren Schicht im Netzwerk angeben, so dass der Output $y := DFT(x)$ schließlich an den Knoten der untersten Schicht vorliegt. Veranschaulichen Sie die Vorgehensweise graphisch am $BF(4)$ und verifizieren Sie die Korrektheit. (8 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen erfolgt am 26.1.2005 bis 12.00 Uhr in den Briefkasten mit der Aufschrift **Übung - Algorithmen für netzwerkgekoppelte Systeme** im Erdgeschoss des Pohlighauses (Pohligstr.1). Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in der Übungsstunde am 2.2.2006.