

Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Blatt 10

Aufgaben:

37. Das Problem des maximalen Schnittes, MAX-CUT, ist, für einen Graphen $G = (V, E)$ einen maximalen Schnitt zu finden. Ein Schnitt von $G = (V, E)$ ist ein Paar (V_1, V_2) mit $V_1 \cup V_2 = V$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Der Preis eines Schnittes (V_1, V_2) von G ist die Anzahl der Kanten zwischen V_1 und V_2 , d.h.

$$\text{cost}(V_1, V_2) = |E \cap \{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}|.$$

Das Problem der minimalen Knotenüberdeckung, MIN-VC, ist für einen Graphen G eine minimale Knotenüberdeckung (vertex cover) zu finden.

- (a) Geben Sie formale Definitionen der Optimierungsprobleme MAX-CUT und MIN-VC an und zeigen Sie, dass beide in NPO liegen. (3 Punkte)
- (b) Beweisen Sie, dass MAX-CUT und MIN-VC NP-schwer sind. (3 Punkte)
38. Ein Graph ist k -färbbar, wenn es eine Zuordnung von den Knoten zu k Farben gibt, so dass beliebige benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Beweisen Sie, dass das Entscheidungsproblem, ob ein ungerichteter Graph 2-färbbar ist, in der Komplexitätsklasse P liegt. (Es reicht aus einen polynomiellen Algorithmus anzugeben, der das 2-Färbung-Problem entscheidet. Begründen Sie Laufzeit und Korrektheit des von Ihnen entworfenen Algorithmus.) (4 Punkte)

Hinweis: 2-Färbbarkeit ist äquivalent zu der Eigenschaft, dass alle Kreise im Graphen gerade Länge haben. Dies müssen Sie noch beweisen.

39. (a) RUCKSACK (oder SUBSET SUM): Gegeben sind $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$.
PARTITION: Gegeben sind $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$.
Zeigen Sie, dass das PARTITION-Problem NP-vollständig ist. (3 Punkte)
Ohne Beweis können Sie benutzen, dass das RUCKSACK-Problem NP-vollständig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass das Traveling-Salesman-Problem (TSP) NP-vollständig ist. (3 Punkte)
Hinweis: Die Frage, ob ein Graph einen Hamiltonschen Kreis hat, also einen Kreis, in dem jede Ecke genau einmal vorkommt, ist NP-vollständig. Das können Sie benutzen, ohne es zu zeigen.

40. (a) Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ einen zusammenhängenden Graphen G_n , so dass die optimale Knotenüberdeckung die Mächtigkeit n hat und der Algorithmus VCA auf Seite 255 eine Überdeckung mit der Mächtigkeit $2n$ konstruieren kann. (3 Punkte)

- (b) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$ eine Kostenfunktion c_n für den vollständigen Graphen K_n mit n Knoten, so dass c_n den Kanten von K_n mindestens zwei unterschiedliche Werte zuordnet und der Algorithmus SB auf Seite 259 immer eine optimale Lösung ausrechnet. (3 Punkte)
- (c) Finden Sie für jede ganze Zahl $n \geq 4$ eine Instanz I_n des Δ -TSP mit der Eigenschaft

$$\frac{SB(I_n)}{OPT_{\Delta-TSP}(I_n)} \geq \frac{2n-2}{n+1}$$

$SB(I_n) = cost(I_n)$ sind die Kosten des Hamiltonschen Kreises von Algorithmus SB für die Eingabe I_n und $OPT_{\Delta-TSP}(I_n)$ Kosten eines optimalen Hamiltonschen Kreises. (3 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen erfolgt am 28.07.2004 bis 14.00 Uhr in den Briefkasten mit der Aufschrift **Übung - Theoretische Informatik** im Erdgeschoss des Pohlighauses (Pohligstr.1). Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in der Übungsstunde am 29.07.2004.

In der Übungsstunde am 22.07.2004 wird die Lösung der Klausur besprochen.