Dr. Christoph Buchheim†
Dr. Frauke Liers†
Dr. Diana Fanghänel†

Sommersemester 2008

Übung 8 - Globalisierte robuste Optimierung

Besprechung Dienstag, 10.06.2008, in der Übung

Robuste Optimierung

Aufgabe 1: Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Theorem: Es sei eine Perturbationsstruktur $(U, K, \|\cdot\|)$ gegeben und $s \geq 0$. Dann ist ein Vektor x globalisiert robust zulässig (d.h. erfüllt

$$\left(a^* + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \alpha^l\right)^\top x \geq b^* + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \beta_l - s \cdot \operatorname{dist}(\xi, U, K) \tag{1}$$

für alle $\xi \in U_+ = U + K$) genau dann, wenn x das folgende Paar von Ungleichungen erfüllt:

$$(a) \qquad \left(a^* + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \alpha^l\right)^\top x \geq b^* + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \beta_l \qquad \forall \xi \in U \tag{2}$$

$$(b) \qquad \left(\sum_{l=1}^{L} \Delta_l \alpha^l\right)^\top x \geq \sum_{l=1}^{L} \Delta_l \beta_l - s \qquad \forall \Delta \in \tilde{U} := \{u \in K : \ \|u\| \leq 1\}. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass aus dem Erfülltsein von (1) die Gültigkeit von (2) und (3) folgt. Untersuchen Sie dabei für (3) Vektoren der Form $\xi(t) = \xi^* + t\Delta$ mit $\xi^* \in U$ und $\Delta \in K$, $\|\Delta\| \leq 1$.

b) Sei $\xi \in U + K$ beliebig. Dann existiert ein $\xi^* \in U$ und ein $\Delta \in K$ mit $\xi = \xi^* + \Delta$ und $dist(\xi, U, K) = \|\Delta\|$. Zeigen Sie dann, dass ξ die Ungleichung (1) erfüllt, wenn für ξ^* bzw. e mit $\Delta = e \cdot dist(\xi, U, K)$ die Ungleichungen (2) und (3) gelten.

Aufgabe 2: Zeigen Sie mit Hilfe des obigen Satzes Folgendes:

a) $U = \{\xi : \ |\xi_l| \leq r_l, \ l = 1, \ldots, L\}$ sei ein Parallelotop, $K = \mathbb{R}^L$ und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_1$. Die Ungleichung (a) aus dem Theorem entspricht dann

$$a^{*\top} x - \sum_{l=1}^{L} r_l |\alpha^l x - \beta_l| \geq b^*$$

und (b) entspricht

$$|\alpha^{l\top} x - \beta_l| \leq s, \qquad l = 1, \ldots, L.$$

b) Sei $U = \{\xi : \ \sum_{l=1}^{L} \xi_l^2 / \sigma_l^2 \leq r^2\}$ ein Ellipsoid, $K = \mathbb{R}_+^L$ und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$. Die Ungleichungen (a) und (b) aus dem Theorem entsprechen dann

$$a^{*\top} x - r \sqrt{\sum_{l=1}^{L} \sigma_l^2 (\alpha^l x - \beta_l)^2} \geq b^* \quad \text{und} \quad \sqrt{\sum_{l=1}^{L} \min[0, \alpha^{l\top} x - \beta_l]^2} \leq s.$$

---

† {buchheim|liers|fanghaenel}@informatik.uni-koeln.de
Hinweise bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden Sie unter :
http://www.informatik.uni-koeln.de/ls_juenger/teaching/ss_08/

Aufgabe 3: Es soll im Folgenden erneut die Pharmakonzern-Aufgabe vom 5.Übungsblatt betrachtet werden. Es sei nun der Wirkstoffinhalt von

$$\begin{aligned} \text{W in M1} &= 0.01g/kg + 0.00005g/kg \cdot u_1, \\ \text{W in M2} &= 0.02g/kg + 0.0004g/kg \cdot u_2. \end{aligned}$$

Dabei seien u_1 und u_2 Zufallsvariablen mit $u_1, u_2 \in [-1; 1]$.

a) Geben Sie unter Verwendung von Aufgabe 4 vom 7. Übungsblatt eine robuste Modellierung der Aufgabe an mit

$$\mathcal{Z} = \{(u_1, u_2) : \ -1 \leq u_1 \leq 1, \ -1 \leq u_2 \leq 1, \ \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq \Omega\}, \quad \Omega = 4.$$

b) Berechnen Sie für diese Modellierung einen optimalen Produktionsplan und schätzen Sie ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit ihre berechnete Lösung zulässig ist.