

---

## Vorlesungsskript(3.Teil)

# Robuste Optimierung

---

In der Optimierung bestimmt man im Allgemeinen optimale Lösungen in der Annahme, dass die Eingabedaten exakt bekannt sind. In der Praxis ist dies jedoch häufig nicht der Fall, da Messfehler, Rundungsfehler oder andere Unsicherheiten in den Problemdata auftreten können. So kann es sein, dass eine Problemlösung bei etwas geänderten Eingabedaten unbrauchbar wird, da sie sehr weit von der realen Lösung entfernt liegt oder gar für das Problem unzulässig ist.

Einen Ausweg aus dieser Situation bietet die robuste Optimierung. Hier werden zusätzlich zu den Eingabedaten Toleranzen angegeben. Gesucht wird eine möglichst gute Lösung, welche für alle innerhalb der Toleranzen liegenden Eingabewerte zulässig ist.

Das vorliegende Vorlesungsskript wurde anhand des 3.Teils der Vorlesung „Robuste Optimierung“ erstellt, welcher ab Juni 2008 an der Universität zu Köln gelesen wurde. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit oder vollständige Übereinstimmung mit der Vorlesung erhoben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>6</b>	<b>Stochastische Optimierung</b>	<b>3</b>
6.1	Ein Beispiel . . . . .	3
6.2	Einige Grundbegriffe der Stochastik . . . . .	7
6.3	Zweistufige stochastische lineare Programme . . . . .	8
6.4	Ganzzahlige Programme . . . . .	12
6.5	Der Wert der vollständigen Information und der stochastischen Lösung . . . . .	14
6.5.1	Definitionen . . . . .	14
6.5.2	Beziehungen zwischen den Lösungsdefinitionen . . . . .	16
6.5.3	Beispiele . . . . .	18
6.6	Die L-Methode . . . . .	22

---

<sup>1</sup>{buchheim|liers|fanghaenel}@informatik.uni-koeln.de  
Hinweise bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden Sie unter :  
[http://www.informatik.uni-koeln.de/ls\\_juenger/teaching/ss\\_08/](http://www.informatik.uni-koeln.de/ls_juenger/teaching/ss_08/)

## 6 Stochastische Optimierung

### 6.1 Ein Beispiel

**Beispiel 6.1.** *Ein Bauer muss entscheiden, was er anbaut: Weizen, Mais oder Zuckerrüben. Hierfür hat er Einschränkungen.*

- *Er besitzt 500 ha Land.*
- *Er benötigt 200 t Weizen und 240 t Mais als Viehfutter. Er kann dies selbst anbauen oder kaufen. Überschüsse werden verkauft.*
- *Der Verkaufspreis ist 170 Euro/t für Weizen und 150 Euro/t für Mais. Der Einkaufspreis ist jeweils 40% höher.*
- *Zuckerrüben können für 36 Euro/t verkauft werden, aber wegen der EU-Quote nur bis 6000 t. Alles darüber bringt 10 Euro/t ein.*
- *Die Pflanzkosten betragen 150 Euro/t für Weizen, 230 Euro/t für Mais und 260 Euro/t für Zuckerrüben.*

*Die Erträge sind erfahrungsgemäß 2.5 t/ha für Weizen, 3 t/ha für Mais und 20 t/ha für Zuckerrüben.*

*Wir wollen die Aufgabe zunächst ohne Zufall modellieren. Wir verwenden hierfür die folgenden Variablen:*

$x_1$  = Fläche für Weizen (in ha)

$x_2$  = Fläche für Mais (in ha)

$x_3$  = Fläche für Zuckerrüben (in ha)

$y_1$  = gekaufter Weizen (in t)

$y_2$  = gekaufter Mais (in t)

$w_1$  = verkaufter Weizen (in t)

$w_2$  = verkaufter Mais (in t)

$w_3$  = verkaufte Zuckerrüben (in t) zu hohem Preis

$w_4$  = verkaufte Zuckerrüben (in t) zu niedrigem Preis.

*Wir lösen somit das folgende lineare Optimierungsproblem (LPL)*

$$\begin{array}{rcl}
150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 & & \\
-170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 & \rightarrow & \min \\
\text{s.d.} & & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& & 2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \\
& & 3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \\
& & 20x_3 - w_3 - w_4 \geq 0 \\
& & w_3 \leq 6000 \\
& & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0.
\end{array}$$

(LPL)

Die Optimallösung für dieses Problem ist  $x_1 = 120$ ,  $x_2 = 80$ ,  $x_3 = 300$ ,  $y_1 = y_2 = 0$ ,  $w_1 = 100$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = 6000$  und  $w_4 = 0$ . Es werden also der selbst benötigte Mais produziert und 6000t Zuckerrüben. Die restliche Fläche wird vollständig für den Weizenanbau genutzt. Der Gewinn beträgt 118600 Euro.

Das Wetter hat i.a. großen Einfluss auf die Erträge. Wir betrachten drei mögliche Fälle:

- Normales Jahr: Erträge wie bisher,
- Gutes Jahr: Erträge um 20% höher,
- Schlechtes Jahr: Erträge um 20% niedriger.

Die Wahrscheinlichkeit jedes Szenarios sei 1/3.

Wir wollen nun die Kosten robust optimieren. Wir nehmen also den schlechtesten Fall an. Dann sind die Erträge 2 t/ha, 2.4 t/ha bzw. 16 t/ha.

Mit diesen neuen Erträgen ist die Optimallösung  $x_1 = 100$ ,  $x_2 = 25$ ,  $x_3 = 375$ ,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 180$ ,  $w_1 = w_2 = w_4 = 0$  und  $w_3 = 6000$ . Der Gewinn ist dann 59950 Euro.

Wir vergleichen dies mit der nominalen Lösung. Diese ist für die neuen Erträge unzulässig. Wenn wir aber  $x_1 = 120$ ,  $x_2 = 80$  und  $x_3 = 300$  festsetzen, dann können wir die  $y_i$  und  $w_j$  neu berechnen, indem wir über diese optimieren. Wir erhalten  $y_2 = 48$ ,  $w_1 = 40$ ,  $w_3 = 4800$  und  $y_1 = w_2 = w_4 = 0$ . Der Gewinn beträgt dann 55120 Euro und ist somit kleiner als bei der robusten Lösung.

Die Variablen in diesem Beispiel können wie folgt unterschieden werden. Der Bauer muss stets zuerst die  $x$ -Variablen festlegen (Variablen 1. Stufe). Die  $y$  und  $w$  Variablen können später festgelegt werden, wenn keine Unsicherheit mehr besteht.

Wir nutzen dies, um zu berechnen, wie gut die robuste Lösung im Mittel ist. Wir setzen  $x_1 = 100$ ,  $x_2 = 25$  und  $x_3 = 375$  in (LPL) ein und passen die Erträge an. Die Werte  $y_i$  und  $w_j$  werden für normale Jahre mit dem folgenden linearen

Problem berechnet:

$$\begin{aligned}
 118250 + 238y_1 + 210y_2 - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 &\rightarrow \min \\
 \text{s.d.} \quad y_1 - w_1 &\geq -50 \\
 y_2 - w_2 &\geq 165 \\
 w_3 + w_4 &\leq 7500 \\
 w_3 &\leq 6000 \\
 y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Die Optimallösung für diese Aufgabe ist  $y_2 = 165$ ,  $w_1 = 50$ ,  $w_3 = 6000$  und  $w_4 = 1500$ . Alle anderen Variablen sind Null. Der optimale Gewinn ist dann 86600 Euro.

Für gute Jahre liefert die analoge Rechnung die Lösung  $y_2 = 150$ ,  $w_1 = 100$ ,  $w_3 = 6000$  und  $w_4 = 3000$ . Alle anderen Variablen sind Null. Der optimale Gewinn ist dann 113250 Euro.

Der erwartete Gewinn mit robuster Lösung ist dann

$$(59950 + 86600 + 113250)/3 \text{ Euro} = 86600 \text{ Euro.}$$

Die analoge Berechnung für die Lösung  $x = (120, 80, 300)$  des nominalen Problems (LPL) ergibt 107240 Euro und ist somit deutlich besser. Es ist also nicht immer sinnvoll, den robusten Lösungsansatz zu verwenden.

Wir wollen nun den Erwartungswert direkt modellieren anstatt durchschnittliche Parameter zu verwenden. Hierfür verwenden wir je einen Satz Variablen  $y$  und  $w$  (Variablen der 2. Stufe) pro Szenario und bilden den Durchschnitt in der Zielfunktion.

$$\begin{aligned}
 (LPL-S) \quad &150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\
 &+ \frac{1}{3}(238y_{11} + 210y_{12} - 170w_{11} - 150w_{12} - 36w_{13} - 10w_{14}) \\
 &+ \frac{1}{3}(238y_{21} + 210y_{22} - 170w_{21} - 150w_{22} - 36w_{23} - 10w_{24}) \\
 &+ \frac{1}{3}(238y_{31} + 210y_{32} - 170w_{31} - 150w_{32} - 36w_{33} - 10w_{34}) \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{so dass} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 500 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3x_1 + y_{11} - w_{11} &\geq 200 \\
 3.6x_2 + y_{12} - w_{12} &\geq 240 \\
 24x_3 - w_{13} - w_{14} &\geq 0 \\
 w_{13} &\leq 6000 \\
 y_{11}, y_{12}, w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14} &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.5x_1 + y_{21} - w_{21} &\geq 200 \\
3x_2 + y_{22} - w_{22} &\geq 240 \\
20x_3 - w_{23} - w_{24} &\geq 0 \\
w_{23} &\leq 6000 \\
y_{21}, y_{22}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24} &\geq 0 \\
\\
2x_1 + y_{31} - w_{31} &\geq 200 \\
2.4x_2 + y_{32} - w_{32} &\geq 240 \\
16x_3 - w_{33} - w_{34} &\geq 0 \\
w_{33} &\leq 6000 \\
y_{31}, y_{32}, w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Die  $x$ -Variablen (1. Stufe) müssen für alle Szenarien gleich gewählt werden. Die  $y$  und  $w$  Variablen (2. Stufe) können für jedes Szenario einzeln optimiert werden.

Als Optimallösung von (LPL – S) erhält man

$$x = (170, 80, 250) \quad \text{und} \quad w_{13} = 6000, w_{23} = 5000, w_{33} = 4000$$

für die teuer verkauften Mengen an Zuckerrüben. Der optimale Gewinn beträgt 108390 Euro. Dieser Wert ist besser als die Lösung aus (LPL) mit dem Wert von 107240 Euro. Die Differenz heißt **Wert der stochastischen Lösung (VSS)**.

**Ergebnis:** Mit der Lösung (170, 80, 250) erzielt der Landwirt (langfristig) den größten Gewinn.

Wäre das Wetter vorher bekannt, wäre der Gewinn

$$\left( \underbrace{59950}_{\text{schlechtes Jahr}} + \underbrace{118600}_{\text{normales Jahr}} + \underbrace{167667}_{\text{gutes Jahr}} \right) / 3 = 115406 \text{ Euro.}$$

Die Differenz  $115406 - 108390 = 7016$  heißt **erwarteter Wert der vollständigen Information**.

### Robuste oder stochastische Optimierung?

Man verwendet die robuste Optimierung, wenn

- der Anwender risikoscheu ist.
- die Anwendung sicherheitskritisch ist.
- die Verteilung der Zufallsvariablen unbekannt ist.

Man verwendet die stochastische Optimierung, wenn

- die Verteilung bekannt ist.
- Lösungen oft verwendet werden, so dass die Betrachtung des Erwartungswertes sinnvoll ist.

## 6.2 Einige Grundbegriffe der Stochastik

Wir betrachten Zufallsvariablen  $\xi$  mit Werten im  $\mathbb{R}^k$ . Die Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$  der möglichen Realisierungen heißt **Ergebnisraum**. Eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heißt **Ereignis**. Die **Wahrscheinlichkeit**  $P : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion mit

- (a)  $P(A) \in [0, 1]$  für alle Ereignisse  $A \subseteq \Omega$
- (b)  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- (c)  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$  für alle Ereignisse  $A_1, A_2 \subseteq \Omega$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

**Diskrete Zufallsvariable** sind Zufallsvariable  $\xi$  mit endlich (oder abzählbar) vielen möglichen Werten  $\xi_k, k \in K$ . Sie können beschrieben werden durch eine Funktion

$$f(\xi_k) = P(\xi = \xi_k) \quad \text{mit} \quad \sum_{k \in K} f(\xi_k) = 1.$$

Der **Erwartungswert** von  $\xi$  ist dann  $E(\xi) = \sum_{k \in K} f(\xi_k) \xi_k$ .

**Stetige Zufallsvariable** werden durch ihre **Dichtefunktion**  $f(x)$  beschrieben mit

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Der **Erwartungswert** ist dann  $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ .

Für beliebige Zufallsvariable  $\xi$  definiert man

- die **Varianz** von  $\xi$  als

$$Var(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2).$$

- das **r-te Moment** von  $\xi$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) als

$$\bar{\xi}^{(r)} = E(\xi^r).$$

- das  **$\alpha$ -Quantil** von  $\xi$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) als

$$\min\{x \in \mathbb{R} : P(\xi \leq x) \geq \alpha\}.$$

### Beispiele:

1. Gleichverteilung (diskret)  $\mathcal{U}[1, n]$ : Es ist  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  und  $P(\xi = i) = \frac{1}{n}$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$E(\xi) = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \text{Var}(\xi) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. Gleichverteilung (stetig)  $\mathcal{U}[0, a]$ : Es ist  $\Omega = [0, a]$  mit der Dichtefunktion  $f(x) = 1/a$ . Dann gilt

$$E(\xi) = a/2 \quad \text{und} \quad \text{Var}(\xi) = a^2/12.$$

3. Normalverteilung  $\mathcal{N}(\xi, \sigma^2)$ : Es ist  $\Omega = (-\infty, \infty)$  mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dann ist  $E(\xi) = \mu$  und  $\text{Var}(\xi) = \sigma^2$ .

## 6.3 Zweistufige stochastische lineare Programme

Ein zweistufiges stochastisches lineares Programm (mit festem Rekurs) ist ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x + E \left( \min_{y(w)} q(w)^\top y(w) \right) \\ \text{s.d.} \quad & Ax = b \\ (SLP) \quad & T(w)x + Wy(w) = h(w) \\ & x \geq 0 \\ & y(w) \geq 0. \end{aligned}$$

Hier sind  $c \in \mathbf{R}^{n_1}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$  und die Rekursionsmatrix  $W \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$  unabhängig von den Variablen. Im Gegensatz dazu hängen  $T(w) \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ ,  $q(w) \in \mathbb{R}^{n_2}$  und  $h(w) \in \mathbb{R}^{m_2}$  von  $w \in \Omega$  ab. Wir betrachten  $\xi = (T, q, h)$  als Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{R}^{m_2 n_1 + n_2 + m_2}$ . Es reicht außerdem, dass die Bedingungen

$$(*) \quad T(w)x + Wy(w) = h(w), \quad y(w) \geq 0$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 erfüllt sind. Wenn  $\xi$  endlich ist, d.h. nur endlich viele Werte hat, muss  $(*)$  für alle  $w \in \Omega$  erfüllt sein.

**Äquivalentes deterministisches Problem:** Für fixiertes  $x$  setzen wir

$$Q(x, \xi(w)) := \min_y \{q(w)^\top y : Wy = h(w) - T(w)x, y \geq 0\}$$

und

$$Q(x) := E(Q(x, \xi)).$$

Die Funktion  $Q$  heißt **Rekursfunktion**. Dann ist die Aufgabe ( $SLP$ ) äquivalent zu

$$(SLP') \quad \begin{array}{ll} \min_x & c^\top x + Q(x) \\ \text{s.d.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Im Beispiel 6.1 sind  $Q(x)$  die erwarteten Kosten, ohne Pflanzkosten, bei gegebener Aufteilung  $x$  des Ackers.

Die Aufgaben der Form ( $SLP$ ) werden somit in 2 Stufen gelöst.

**(1.Stufe)** Bestimme  $x$  unter Unsicherheit, d.h. die Realisierung von  $\xi$  ist nicht bekannt.

Das Zufallsereignis tritt ein.

**(2.Stufe)** Bestimme  $y$  mit dem Ziel, den „Schaden“ durch das Zufallsereignis so weit wie möglich auszugleichen.

Wenn  $\xi$  endlich ist, kann die Aufgabe ( $SLP$ ) analog wie in Beispiel 6.1 gelöst werden, d.h. mit einem linearen deterministischen Programm. Dieses wird aber schnell zu groß.

**Beispiel 6.2** (Einrichtung eines Telekommunikationsnetzes). *Es sei ein Telekommunikationsnetz mit 86 Knoten gegeben. Der Datenverkehr an den Knoten sei unbekannt und kann jeweils 5 verschiedene Werte annehmen.*

*Dann ist die Zahl der Szenarien  $5^{86} = 4.77 \cdot 10^{72}$ . Dies entspricht ungefähr der Anzahl aller Atome im Universum. Das deterministische lineare Programm wird also viel zu groß.*

**Fazit:** Wir müssen mit dem äquivalenten Problem ( $SLP'$ ) arbeiten. Dafür ist es aber notwendig, die Funktion  $Q(x)$  verstehen.

Wir nehmen im Folgenden an, dass  $Q(x, \xi(w)) > -\infty$  gilt für alle  $x$  und alle  $w \in \Omega$ . Es sei

$$\mathcal{K}_1 := \{x : Ax = b, x \geq 0\} \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_2 := \{x : Q(x) < \infty\}.$$

Dabei bedeutet  $x \in \mathcal{K}_2$ , dass für  $x$  fast immer (also mit Wahrscheinlichkeit 1) ein zulässiges  $y(w)$  existiert.

**Theorem 6.1.** Die Funktion  $Q(x, \xi(w))$  ist:

- (a) stückweise linear und konvex in  $(h, T)$ .
- (b) stückweise konkav in  $q$
- (c) stückweise linear und konvex in  $x$  für  $x \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ .

*Beweis.* Für die Konvexität in (a) und (c) genügt es zu zeigen, dass

$$f(b) := \min_y \{q^\top y : Wy = b, y \geq 0\}$$

konvex in  $b$  ist. Sei  $b = \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$  für  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ . Sei außerdem  $y_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , eine optimale Lösung der Aufgabe

$$\min_y \{q^\top y : Wy = b_i, y \geq 0\}.$$

Dann ist  $y^* = \lambda y_1^* + (1 - \lambda)y_2^*$  eine zulässige Lösung von der Aufgabe

$$\min_y \{q^\top y : Wy = b, y \geq 0\}.$$

Somit gilt

$$f(b) \leq q^\top (\lambda y_1^* + (1 - \lambda)y_2^*) = \lambda f(b_1) + (1 - \lambda)f(b_2),$$

d.h.  $f$  ist konvex. Die Konkavität in (b) wird analog gezeigt.

Die stückweise Linearität folgt aus der endlichen Zahl optimaler Basen von linearen Programmen.  $\square$

**Folgerung 6.2.** Sei  $\xi$  endlich. Dann ist  $\mathcal{Q}$  eine stückweise lineare, konvexe Funktion auf  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ .

*Beweis.* Falls  $\xi$  endlich viele Werte  $\xi_1, \dots, \xi_k$  hat mit  $p_i := P(\xi = \xi_i)$ , dann gilt

$$\mathcal{Q}(x) = E(Q(x, \xi)) = \sum_{i=1}^k p_i Q(x, \xi_i)$$

mit  $p_i > 0$  für alle  $i$ . Die Behauptung folgt nun aus der stückweisen Linearität und Konvexität der Funktionen  $Q(x, \xi)$  (siehe Theorem 6.1).  $\square$

**Bemerkung:** Für stetige Zufallsvariablen gilt ähnliches. Wenn das 2. Moment  $\bar{\xi}^{(2)}$  endlich ist, ist  $\mathcal{Q}(x)$  konvex und Lipschitz-stetig.

**Beispiel 6.3** (Das Rosenverkäuferproblem). *Ein Rosenverkäufer kauft morgens Rosen und versucht, sie im Laufe des Tages wieder zu verkaufen. Es sei:*

- c. . . der Kaufpreis einer Rose,*
- q. . . der Verkaufspreis einer Rose,*
- r. . . der Rückgabepreis am Ende eines Tages.*

*Es sei  $\xi$  die Anzahl der verkauften (bzw. potentiell verkaufbaren) Rosen. Bekannt sei die Verteilung von  $\xi$ , gegeben durch  $F(t) = P(\xi \leq t)$ .  $F$  habe eine Dichtefunktion  $f$ , d.h. es ist  $F(t) = \int_{-\infty}^t f(z)dz$ .*

*Wieviele Rosen sollte der Verkäufer morgens kaufen?*

*Die Aufgabe lautet*

$$\max_x \{-cx + \mathcal{Q}(x) : x \geq 0\}$$

*mit  $\mathcal{Q}(x) = E(Q(x, \xi))$  und*

$$Q(x, \xi(w)) = \begin{cases} qx & \text{falls } x \leq \xi(w) \\ q\xi(w) + r(x - \xi(w)) & \text{falls } x \geq \xi(w). \end{cases}$$

*Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, z)f(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^x (qz + r(x - z))f(z)dz + \int_x^{\infty} qxf(z)dz \\ &= (q - r) \int_{-\infty}^x zf(z)dz + rx \int_{-\infty}^x f(z)dz + qx \int_x^{\infty} f(z)dz. \end{aligned}$$

*Falls  $\lim_{t \rightarrow -\infty} tF(t) = 0$  ist, gilt*

$$\int_{-\infty}^x zf(z)dz = xF(x) - \int_{-\infty}^x F(z)dz.$$

*Somit ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= (q - r)xF(x) - (q - r) \int_{-\infty}^x F(z)dz + rxF(x) + qx(1 - F(x)) \\ &= qx - (q - r) \int_{-\infty}^x F(z)dz. \end{aligned}$$

*Diese Funktion ist konkav und differenzierbar bzgl.  $x$ . Somit ist auch die Funktion  $-cx + \mathcal{Q}(x)$  konkav und differenzierbar. Das Maximum kann also mit der*

Ableitung berechnet werden oder ist  $x = 0$ . Wir erhalten für jeden stationären Punkt  $x^*$

$$0 = -c + \mathcal{Q}'(x) = -c + q - (q - r)F(x^*)$$

und somit

$$F(x^*) = \frac{q - c}{q - r} \quad \text{beziehungsweise} \quad x^* = F^{-1}\left(\frac{q - c}{q - r}\right).$$

Sei hier  $c=1.5$  Euro,  $q=2.5$  Euro,  $r=20$  ct und sei  $\xi \sim \mathcal{N}(65, 8)$  normalverteilt. Dann ist  $x^* = 63.686$ . Da es sich bei  $x$  um eine Anzahl von Blumen handelt, ist also  $x^* = 64$  oder  $x^* = 63$  zu wählen.

## 6.4 Ganzzahlige Programme

Analog zu Kapitel 6.3 ist ein zweistufiges stochastisches (gemischt) ganzzahliges Programm (mit festem Rekurs) ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned}
 & \min_x \quad c^\top x + E\left(\min_y q(w)^\top y(w)\right) \\
 & \text{s.d.} \quad Ax = b \\
 (SMIP) \quad & T(w)x + Wy(w) = h(w) \\
 & x \geq 0 \\
 & y(w) \geq 0 \\
 & x_i \in \mathbb{Z} \quad \text{für } i \in I_1 \\
 & y_i(w) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } i \in I_2.
 \end{aligned}$$

Wie zuvor sei

$$Q(x, \xi(w)) := \min_y \{q(w)^\top y : Wy = h(w) - T(w)x, y \geq 0, y_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i \in I_2\}$$

und

$$\mathcal{Q}(x) := E(Q(x, \xi)).$$

Das zu (SMIP) äquivalente Problem ist dann

$$\begin{aligned}
 (SMIP') \quad & \min_x \quad c^\top x + \mathcal{Q}(x) \\
 & \text{s.d.} \quad Ax = b \\
 & x \geq 0 \\
 & x_i \in \mathbb{Z} \quad \text{für } i \in I_1.
 \end{aligned}$$

Folgerung 6.2 gilt jetzt aber leider nicht mehr. Dies ist Gegenstand des nächsten Theorems.

**Theorem 6.3.** Die Funktion  $Q(x)$  ist im Allgemeinen weder konvex noch stetig. Dies ist auch ohne Zufallsvariablen der Fall.

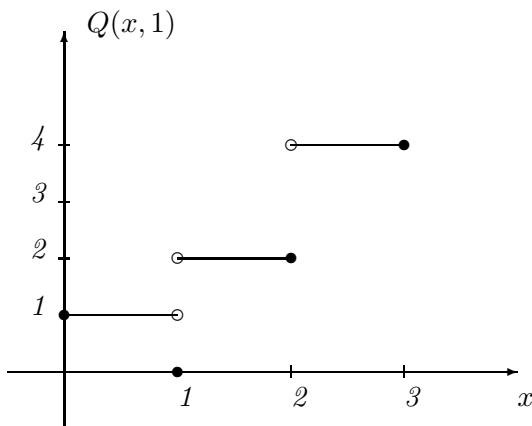
Wir beweisen dieses (negierende) Theorem mit einem Gegenbeispiel.

**Beispiel 6.4** (Beispiel zu Theorem 6.3). Es sei nur eine Variable  $x \geq 0$  (ohne Ganzzahligkeitsforderung) gegeben mit der Rekursfunktion

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) = \min \quad & 2y_1 + y_2 \\ \text{s.d.} \quad & y_1 \geq x - \xi \\ & y_2 \geq \xi - x \\ & y \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Es sei  $\xi = 1$ . Dann gilt:

- Für  $x \leq 1$  ist  $y = (0, [1 - x])$  optimal. Es ist also  $Q(x, 1) = [1 - x]$ .
- Für  $x \geq 1$  ist  $y = ([x - 1], 0)$  optimal. Es ist also  $Q(x, 1) = 2[x - 1]$ .



Somit ist  $Q(x, 1)$  weder stetig noch konvex. Falls  $\xi = 1$  mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt, ist  $Q(x) = Q(x, 1)$  für alle  $x \geq 0$ , d.h. auch  $Q(x)$  ist weder stetig noch konvex.

**Theorem 6.4.** Die Menge  $\mathcal{K}_2 = \{x : Q(x) < \infty\}$  ist im Allgemeinen nicht konvex.

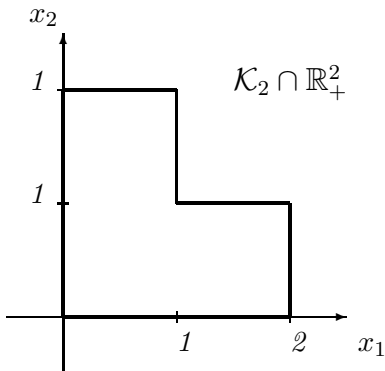
**Beispiel 6.5** (Beispiel zu Theorem 6.4). Seien  $x_1, x_2 \geq 0$  die Variablen 1. Stufe und seien

$$\begin{aligned} (*) \quad & -y_1 + y_2 \leq \xi - x_1 \\ & y_1 + y_2 \leq 2 - x_2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

die Bedingungen der 2. Stufe. Es sei wieder  $\xi = 1$  mit Wahrscheinlichkeit 1.

1. Falls  $x_2 < 2$  gilt, ist die Aufgabe (\*) unzulässig. Es gilt  $Q(x) = \infty$  und somit  $x \notin \mathcal{K}_2$ .
2. Falls  $2 \geq x_2 > 1$  gilt, ist  $y_1 + y_2 \leq 2 - x_2$  wegen der Ganzzahligkeit von  $y$  nur zulässig für  $y = (0, 0)$ . Somit gilt  $Q(x) < \infty$  genau dann, wenn  $x_1 \leq 1$  ist.
3. Sei  $0 < x_2 \leq 1$ . Dann ist  $y_1 + y_2 \leq 2 - x_2$  nur für die Punkte  $y = (1, 0)$ ,  $y = (0, 1)$  und  $y = (0, 0)$  erfüllt. Somit gilt  $Q(x) < \infty$  genau dann, wenn  $x_1 \leq 2$  ist.
4. Sei  $0 = x_2$ . Dann ist  $y_1 + y_2 \leq 2 - x_2$  nur für die Punkte  $y = (1, 0)$ ,  $y = (0, 1)$ ,  $y = (1, 1)$  und  $y = (0, 0)$  erfüllt. Somit gilt  $Q(x) < \infty$  wieder genau dann, wenn  $x_1 \leq 2$  ist.

Es ist also  $\mathcal{K}_2 \cap \mathbb{R}_+^2 = ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([0, 2] \times [0, 1])$ . Diese Menge ist nicht konvex. Offensichtlich ist auch  $\mathcal{K}_2$  nicht konvex.



## 6.5 Der Wert der vollständigen Information und der stochastischen Lösung

### 6.5.1 Definitionen

Wir untersuchen zwei Größen:

- den Nutzen, das Zufallsereignis vorher zu kennen,
- den Nutzen der stochastischen Optimierung.

Sei

$$z(x, \xi(w)) = c^\top x + \min_y q(w)^\top y \\ \text{s.d. } Wy = h(w) - T(w)x \\ y \geq 0$$

der Wert der Zielfunktion in (*SLP*) für gegebenes  $x$  und gegebenes Zufallsereignis  $w \in \Omega$ . Wir setzen

$$z(x, \xi(w)) = \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } x \notin \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \\ -\infty, & \text{wenn das Minimum nach unten unbeschränkt ist.} \end{cases}$$

**Annahme:** Für alle  $w \in \Omega$  existiert ein  $x$  mit  $z(x, \xi(w)) < \infty$ .

Für  $w \in \Omega$  sei nun  $\bar{x}(\xi(w))$  eine optimale Lösung, also

$$z(\bar{x}(\xi(w)), \xi(w)) = \min_x \{z(x, \xi(w)) : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Zu verschiedenen Szenarios werden also verschiedene Lösungen betrachtet.

**Szenarioansatz:** Wir bestimmen für verschiedene Szenarien  $w \in \Omega$  die Werte  $\bar{x}(\xi(w))$  und  $z(\bar{x}(\xi(w)), \xi(w))$ . Diese Werte können unterschiedlich ausgewertet werden.

### Wait-and-see-Lösung

$$WS := E(z(\bar{x}(\xi), \xi)) = E(\min_x z(x, \xi)).$$

Bei diesem Lösungszugang warten wir auf das Ereignis  $w$  und wählen dann die Optimallösung  $\bar{x}(\xi(w))$ . Da kein Einfluss auf  $\xi$  besteht, betrachtet man den Erwartungswert.

### Here-and-now-Lösung

$$RP := \min_x E(z(x, \xi)).$$

Die Entscheidung muss vor dem Zufallsereignis getroffen werden (Rekursproblem aus Kapitel 6.3).

Der Unterschied zwischen WS und RP besteht darin, dass Erwartungswert und Minimumsbildung vertauscht sind.

## Erwartungswertproblem

$$EV := \min_x z(x, E(\xi)).$$

Hier wird nur dasjenige Szenario betrachtet, welches dem Erwartungswert entspricht. Sei  $\bar{x}_{EV}$  die optimale Lösung von diesem Problem. Dann kann die Qualität dieser Lösung mit dem Erwartungswert

$$EEV := E(z(\bar{x}_{EV}, \xi))$$

charakterisiert werden.

Der **Wert der vollständigen Information** ist definiert als

$$EVPI := RP - WS.$$

Dieser Wert gibt an, wie nützlich es ist, die Zufallsereignisse vorher zu kennen.

Der **Wert der stochastischen Lösung** ist definiert als

$$VSS := EEV - RP.$$

Er gibt den Nutzen an, welchen die Verwendung der Methoden der stochastischen Optimierung bringt.

### 6.5.2 Beziehungen zwischen den Lösungsdefinitionen

**Theorem 6.5.** *Es gilt  $WS \leq RP$ , also  $EVPI \geq 0$ .*

*Beweis.* Sei  $x^*$  eine optimale Lösung in RP. Für jedes  $w \in \Omega$  gilt

$$z(\bar{x}(\xi(w)), \xi(w)) \leq z(x^*, \xi(w)),$$

weil  $\bar{x}(\xi(w))$  nach Definition optimal ist für  $\xi(w)$ . Somit gilt

$$WS = E(z(\bar{x}(\xi), \xi)) \leq E(z(x^*, \xi)) = RP.$$

□

**Theorem 6.6.** *Es gilt  $RP \leq EEV$ , also  $VSS \geq 0$ .*

*Beweis.* Sei  $\bar{x}(E(\xi))$  eine Optimallösung von EV. Diese ist zulässig für RP. Somit ist  $RP \leq E_\xi(z(\bar{x}(E(\xi)), \xi)) = EEV$ . □

**Theorem 6.7.** *Seien  $q$  und  $T$  von  $\xi$  unabhängig, d.h. fest. Dann gilt  $EV \leq WS$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion  $f(w) := \min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, w)$ . Nach Definition gilt

$$WS = E(f(\xi)) \quad \text{und} \quad EV = f(E(\xi)).$$

Wenn  $f$  konvex ist, dann folgt also die Behauptung aus Jensens Ungleichung. Es soll also nun gezeigt werden, dass  $f$  konvex ist.

Die Funktion  $f$  hängt nur von  $h$  ab, da  $q$  und  $T$  fest sind. Es gilt

$$\begin{aligned} f(w) &= \min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, w) \\ &= \min_{x, y} \{c^\top x + q^\top y : Ax = b, x \geq 0, Wy + Tx = h(w), y \geq 0\} \\ &\stackrel{\text{dual}}{=} \max_{\sigma, \pi} \{\sigma^\top b + \pi^\top h(w) : A^\top \sigma + T^\top \pi \leq c, W^\top \pi \leq q\}. \end{aligned}$$

Der Epigraph  $\Pi(f) = \{(x, y) : y \geq f(x)\}$  ist also der Durchschnitt der Epigraphen der linearen Funktionen  $\sigma^\top b + \pi^\top h(w)$ , da die dualen Nebenbedingungen nicht von  $w$  abhängen.  $\Pi(f)$  ist somit eine konvexe Menge. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn  $f$  konvex ist.  $\square$

Theorem 6.7 gilt im Allgemeinen nicht, wenn  $q$  zufällig ist.

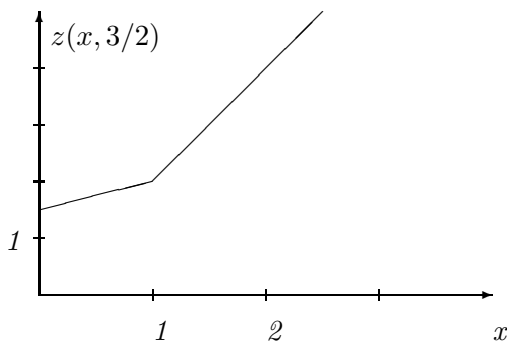
**Beispiel 6.6.** Gegeben sei die Aufgabe  $\min_{x \geq 0} 2x + E(Q(x, \xi))$  mit

$$Q(x, \xi) = \min_y \{\xi y : y \geq 1 - x, y \geq 0\}.$$

Es sei  $\xi = 1$  mit Wahrscheinlichkeit  $3/4$  und  $\xi = 3$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1/4$ .

Dann gilt  $Q(x, \xi) = \xi \cdot \max\{0, 1 - x\}$  wegen  $\xi \geq 0$ , d.h.  $z(x, \xi) = 2x + \xi \cdot \max\{0, 1 - x\}$ . Somit ist

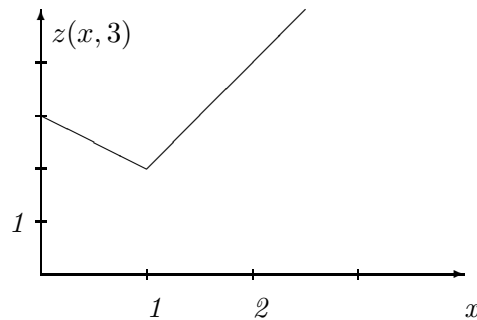
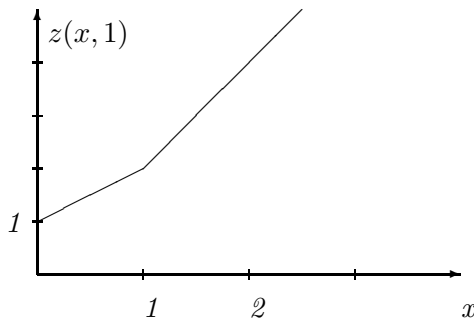
$$\begin{aligned} EV &= \min_{x \geq 0} z(x, E(\xi)) = \min_{x \geq 0} z(x, 3/2) \\ &= \min_{x \geq 0} 2x + \frac{3}{2} \cdot \max\{0, 1 - x\}. \end{aligned}$$



Diese Funktion ist monoton steigend. Somit wird das Minimum am linken Rand bei  $x = 0$  angenommen, d.h.  $EV = z(0, 3/2) = 3/2$ .

Wir berechnen nun den Wert  $WS$ .

$$\begin{aligned} WS &= E(\min_{x \geq 0} z(x, \xi)) \\ &= \frac{3}{4} \min_{x \geq 0} z(x, 1) + \frac{1}{4} \min_{x \geq 0} z(x, 3). \end{aligned}$$



Es gilt also  $\min_{x \geq 0} z(x, 1) = 1$  und  $\min_{x \geq 0} z(x, 3) = 2$ . Somit ist

$$WS = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{5}{4} < \frac{3}{2} = EV.$$

**Folgerung 6.8.** Seien  $q$  und  $T$  von  $\xi$  unabhängig. Dann gilt

$$EVPI \leq EEV - EV \quad \text{und} \quad VSS \leq EEV - EV.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} EVPI &= RP - WS \leq EEV - WS \leq EEV - EV, \\ VSS &= EEV - RP \leq EEV - WS \leq EEV - EV. \end{aligned}$$

□

**Folgerung 6.9.** Wenn  $EEV = EV$  gilt, dann ist  $EVPI = VSS = 0$ .

### 6.5.3 Beispiele

**Frage:** Hängen  $EVPI$  und  $VSS$  zusammen? Ist es möglich einen Wert durch den anderen zu beschränken?

Wir wollen in den folgenden Beispielen zeigen, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist.

**Beispiel 6.7** ( $EVPI = 0$  und  $VVS > 0$ ). Wir betrachten die Aufgabe

$$\min_x \{x_1 + 4x_2 + E(Q(x, \xi)) : x_1 + x_2 = 1, x \geq 0\}$$

mit

$$Q(x, \xi) = \min_y y_1 + 10y_2^+ + 10y_2^-$$

s.d.  $y_1 + y_2^+ - y_2^- = \xi + x_1 - 2x_2, y_1 \leq 2, y_1, y_2^+, y_2^- \geq 0.$

Es gelte  $\xi \sim \mathcal{U}[1, 3]$ . Dann gilt

$$z(x, \xi) = x_1 + 4x_2 + E(Q(x, \xi))$$

$$= \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \xi & \text{falls } 0 \leq \xi + x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -9x_1 + 24x_2 - 10\xi & \text{falls } 0 > \xi + x_1 - 2x_2 \\ -18 + 11x_1 - 16x_2 + 10\xi & \text{falls } 2 < \xi + x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

mit den entsprechenden Optimallösungen  $(\xi + x_1 - 2x_2, 0, 0)$ ,  $(0, 0, -\xi - x_1 + 2x_2)$  bzw.  $(2, \xi + x_1 - 2x_2 - 2, 0)$ . Wegen  $x_1 + x_2 = 1$  ist  $z(x, \xi) = 2 + \xi$  im 1. Fall. Für die beiden anderen Fälle kann gezeigt werden, dass  $z(x, \xi) \geq 2 + \xi$  gilt.

Optimal sind also alle  $x \geq 0$  mit  $x_1 + x_2 = 1$  und  $0 \leq \xi + x_1 - x_2 \leq 2$ . Wenn  $x$  fixiert ist, erfüllt  $\xi$  also die Ungleichungen  $-x_1 + 2x_2 \leq \xi \leq 2 - x_1 + 2x_2$ . Wegen  $x_1 + x_2 = 1$  entspricht dies

$$2 - 3x_1 \leq \xi \leq 4 - 3x_1.$$

Für  $\bar{x}(\xi) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  liegen alle  $\xi \in [1, 3]$  in diesem Bereich, d.h.  $\bar{x}(\xi) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  ist für alle  $\xi$  optimal. Somit ist

$$WS = E(z(\bar{x}(\xi), \xi)) = E(2 + \xi) = 4$$

$$RP = \min_{x \in \mathcal{K}_1} E(z(x, \xi)) = \min_{x \in \mathcal{K}_1} E(2 + \xi) = 4,$$

d.h.  $EVPI = RP - WS = 0$ .

Wir betrachten nun den Punkt  $E(\xi) = 2$ . Das Minimum von  $\min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, 2)$  wird auch bei  $\bar{x} = (0, 1)$  angenommen. Dann gilt

$$z(\bar{x}(2), \xi) = \begin{cases} 2 + \xi & \text{falls } \xi \geq 2 \\ 24 - 10\xi & \text{falls } \xi \leq 2. \end{cases}$$

Beide Fälle sind gleichwahrscheinlich. Also ist

$$EEV = E(z(\bar{x}(2), \xi)) = \frac{1}{2} ((2 + 2.5) + (24 - 10 \cdot 1.5)) = \frac{27}{4}.$$

Hieraus folgt  $VSS = EEV - RP = 27/4 - 4 = 11/4$ .

**Beispiel 6.8** ( $EVPI > 0$  und  $VVS = 0$ ). Wir betrachten dieselbe Aufgabe wie in Beispiel 6.7, aber jetzt sei  $\xi$  endlich mit

$$P(\xi = 0) = P(\xi = 1.5) = P(\xi = 3) = 1/3.$$

Die ersten Ergebnisse aus Beispiel 6.7 werden durch die neuen Zufallsvariablen nicht verändert und können übernommen werden. Wir erhalten somit für die Optimallösungen von  $\min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, \xi)$

$$\begin{aligned}\bar{x}(0) &\in \{x : x_1 + x_2 = 1, \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1\}, \\ \bar{x}(1.5) &\in \{x : x_1 + x_2 = 1, \frac{1}{6} \leq x_1 \leq \frac{5}{6}\}, \\ \bar{x}(3) &\in \{x : x_1 + x_2 = 1, 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}\}.\end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst  $WS$ . Hierfür wählen wir  $\bar{x}(0) = (1, 0)$ ,  $\bar{x}(1.5) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  und  $\bar{x}(3) = (0, 1)$ . Es ist dann

$$\begin{aligned}WS &= \frac{1}{3}(z(\bar{x}(0), 0) + z(\bar{x}(1.5), 1.5) + z(\bar{x}(3), 3)) \\ &= \frac{1}{3}((2 + 0) + (2 + 1.5) + (2 + 3)) = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Für die Berechnung von  $EEV$  wählen wir  $\bar{x}(1.5) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ . Dann ist

$$\begin{aligned}EEV &= E(z(\bar{x}(1.5), \xi)) \\ &= \frac{1}{3}(z(\bar{x}(1.5), 0) + z(\bar{x}(1.5), 1.5) + z(\bar{x}(1.5), 3)) \\ &= \frac{1}{3}((2 + 0) + (2 + 1.5) + (-18 + 11 \cdot \frac{2}{3} - 16 \cdot 13 + 10 \cdot 3)) = \frac{13}{2}.\end{aligned}$$

Schließlich gilt, dass

$$RP = \min_{x \in \mathcal{K}_1} \frac{1}{3}(z(x, 0) + z(x, 1.5) + z(x, 3))$$

optimal ist für  $x = (2/3, 1/3) = \bar{x}(1.5)$ . Es ist also  $RP = EEV$ . Hieraus folgt

$$\begin{aligned}VSS &= EEV - RP = \frac{13}{2} - \frac{13}{2} = 0, \\ EVIP &= RP - WS = \frac{13}{2} - \frac{7}{2} = 3.\end{aligned}$$

Kann man davon ausgehen, dass  $EVPI$  und  $VSS$  mit der Varianz von  $\xi$  wachsen? – Nein. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 6.9.** Wir betrachten die Aufgabe  $\min_{x \geq 0} 6x + E(Q(x, \xi))$  mit

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) &= \min_y \{10y : y \geq x - \xi, y \geq \xi - x\} \\ &= 10 \cdot |x - \xi|. \end{aligned}$$

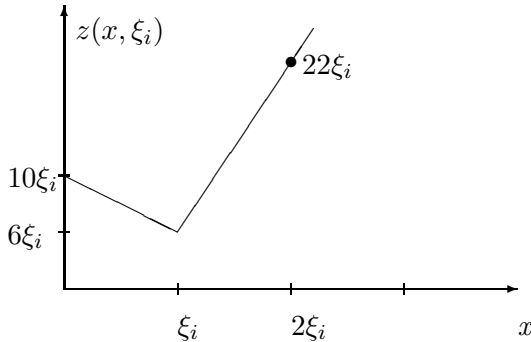
Die Zielfunktion der Aufgabe ist also

$$z(x, \xi) = 6x + 10 \cdot |x - \xi|.$$

Die Zufallsvariable  $\xi$  habe zwei mögliche Werte  $\xi_1, \xi_2$  mit Wahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$ ; dabei sei

$$E(\xi) = p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 = \frac{1}{2}.$$

Die Zielfunktionen  $z(x, \xi)$ ,  $i = 1, 2$ , haben folgende Form:



Die optimalen Lösungen für  $i = 1, 2$  sind also

$$\bar{x}(\xi_i) = \xi_i \quad \text{mit} \quad z(\bar{x}(\xi_i), \xi_i) = 6\xi_i.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} WS &= p_1 z(\bar{x}(\xi_1), \xi_1) + p_2 z(\bar{x}(\xi_2), \xi_2) = 6(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2) = 3, \\ EEV &= p_1 z(0.5, \xi_1) + p_2 z(0.5, \xi_2), \\ RP &= \min_{x \geq 0} p_1 z(x, \xi_1) + p_2 z(x, \xi_2) \\ &= \min\{p_1 z(\xi_1, \xi_1) + p_2 z(\xi_1, \xi_2), p_1 z(\xi_2, \xi_1) + p_2 z(\xi_2, \xi_2)\}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun  $EEV$  und  $RP$  für verschiedene  $\xi_1, \xi_2, p_1$  und  $p_2$  bestimmen.

(a) Sei  $\xi_1 = 1/3, \xi_2 = 2/3$  und  $p_1 = p_2 = 1/2$ . Somit besitzt  $\xi$  die Varianz

$$\text{Var}(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{36}.$$

Außerdem können wir nun  $EEV$  und  $RP$  bestimmen.

$$\begin{aligned}
 RP &= \min \left\{ \frac{1}{2}(6 \cdot \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(6 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3}), \frac{1}{2}(6 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(6 \cdot \frac{2}{3}) \right\} \\
 &= \frac{11}{3}, \\
 EEV &= \frac{1}{2}(3 + 10 \cdot \frac{1}{6}) + \frac{1}{2}(3 + 10 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{14}{3}.
 \end{aligned}$$

Somit ist  $EVPI = 2/3$  und  $VVS = 1$ .

(b) Sei  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1$  und  $p_1 = p_2 = 1/2$ . Dann ist

$$\text{Var}(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2) = \frac{1}{2} \left( \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \right) = \frac{1}{4}.$$

Die Varianz ist also  $9 \times$  größer als in (a). Analog zu (a) kann berechnet werden, dass  $RP = 5$  ist und  $EEV = 8$ . Somit erhalten wir  $EVPI = 2$  und  $VVS = 3$ . Beide Werte sind also größer als in (a).

(c) Sei  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 5/8$ ,  $p_1 = 1/5$  und  $p_2 = 4/5$ . Dann ist die Varianz  $\text{Var}(\xi) = 1/16$  und somit größer als in (a). Außerdem ist  $RP = 5$  und  $EEV = 5$ , d.h. es ist  $EVPI = 5$  und  $VVS = 0$ .  $EVPI$  ist also größer als in (a), aber  $VVS$  ist kleiner.

(d) Sei  $\xi_1 = 2/5$ ,  $\xi_2 = 4/5$ ,  $p_1 = 3/4$  und  $p_2 = 1/4$ . Dann ist die Varianz  $\text{Var}(\xi) = 0.03$  etwas größer als in (a). Es gilt nun  $RP = 17/5$  und  $EEV = 9/2$ . Somit ist also  $EVPI = 2/5$  etwas kleiner als in (a) und  $VVS = 11/10$  etwas größer.

## 6.6 Die L-Methode

Wir betrachten endliche Zufallsvariablen  $\xi$  mit  $N$  möglichen Werten und entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_N$ . Das Problem ( $SLP$ ) (siehe Kapitel 6.3) kann dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^\top x + \sum_{k=1}^N p_k q_k^\top y_k \\
 \text{s.d.} \quad & Ax = b \\
 & x \geq 0 \\
 & T_k x + W y_k = h_k, \quad k = 1, \dots, N \\
 & y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Für große Zahlen  $N$  ist das Lösen dieses linearen Programms im Allgemeinen nicht möglich. Als Alternative betrachten wir den L-Algorithmus (*L-shaped algorithm*), der auf dem Modell

$$(SLP') \quad \begin{array}{ll} \min & c^\top x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.d.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

basiert. Die Idee der L-Methode besteht in einer äußeren Linearisierung vom  $(SLP')$ , d.h.:

1. Ersetze  $\mathcal{Q}(x)$  durch eine neue Variable  $\theta$ :

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x + \theta \\ \text{s.d.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

2. Füge **Gültigkeitsschnitte** hinzu, d.h. lineare Ungleichungen, die  $x$  auf den Bereich  $\mathcal{K}_2$  beschränken ( $\mathcal{K}_2$  ist konvex, da  $\xi$  endlich ist).
3. Füge **Optimalitätsschnitte** hinzu, d.h. lineare Ungleichungen, die  $\theta$  von unten durch  $x$  beschränken ( $\mathcal{Q}(x)$  ist stückweise linear und konvex nach Folgerung 6.2).

Die Ungleichungen in 2. und 3. werden bei Bedarf erzeugt und hinzugefügt. Die L-Methode ist also wie folgt:

**Schritt 0:** Setze  $v := 0$  und sei  $\mathcal{L}$  das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x + \theta \\ \text{s.d.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

**Schritt 1:** Setze  $v := v + 1$  und löse die Aufgabe  $\mathcal{L}$ . Falls  $\theta$  nicht nach unten beschränkt ist, setze  $\theta^v := -\infty$  und löse  $\mathcal{L}$  ohne  $\theta$ . Falls  $\mathcal{L}$  unzulässig ist, dann STOPP: Das Problem  $(SLP)$  ist unzulässig. Sei  $(x^v, \theta^v)$  die gefundene Optimallösung (evtl. mit  $\theta^v = -\infty$ ).

**Schritt 2:** Falls  $x^v \notin \mathcal{K}_2$  ist, füge einen Gültigkeitsschnitt zu  $\mathcal{L}$  hinzu, der  $x^v$  abschneidet, und gehe zu Schritt 1. Andernfalls gehe zu Schritt 3.

**Schritt 3:** Falls  $\theta^v < \mathcal{Q}(x^v)$  ist, füge einen Optimalitätsschnitt zu  $\mathcal{L}$  hinzu, der  $(x^v, \theta^v)$  abschneidet, und gehe zu Schritt 1. Andernfalls ist  $x^v$  optimal: STOPP.

Dieser Algorithmus liefert offensichtlich eine korrekte Lösung, falls er terminiert. Es bleibt nun Folgendes zu beweisen:

- Schritt 2: Man kann entscheiden, ob  $x^v \in \mathcal{K}_2$  liegt und andernfalls einen Gültigkeitsschnitt berechnen.
- Schritt 3: Man kann entscheiden, ob  $\theta^v < \mathcal{Q}(x^v)$  gilt und andernfalls einen Optimalitätsschnitt berechnen.
- Der Algorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten.

**Erzeugung von Optimalitätsschnitten:** Löse für alle  $k = 1, \dots, N$  das lineare Programm

$$Q(x^v, \xi^k) = \min_y \{q_k^\top y : Wy = h_k - T_k x^v, y \geq 0\}$$

und das duale Programm

$$\max_{\pi} \{(h_k - T_k x^v)^\top \pi : W^\top \pi \leq q_k\}.$$

Sei  $\pi_k^v$  die entsprechende Optimallösung des dualen Programms. Dann ist

$$Q(x^v, \xi^k) = (h_k - T_k x^v)^\top \pi_k^v.$$

Es gilt nun für alle  $x \in \mathcal{K}_2$

$$\begin{aligned} Q(x, \xi^k) &= \min_y \{q_k^\top y : Wy = h_k - T_k x, y \geq 0\} \\ &\stackrel{\text{dual}}{=} \max_{\pi} \{(h_k - T_k x)^\top \pi : W^\top \pi \leq q_k\} \\ &\leq (h_k - T_k x)^\top \pi_k^v \end{aligned}$$

da  $\pi_k^v$  die Nebenbedingung der dualen Aufgabe erfüllt.

Wir bilden nun die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x^v) &= E(Q(x^v, \xi)) = \sum_{k=1}^N p_k Q(x^v, \xi^k) = \sum_{k=1}^N p_k (h_k - T_k x^v)^\top \pi_k^v, \\ \mathcal{Q}(x) &= E(Q(x, \xi)) = \sum_{k=1}^N p_k Q(x, \xi^k) \geq \sum_{k=1}^N p_k (h_k - T_k x)^\top \pi_k^v. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\theta \geq \sum_{k=1}^N p_k (h_k - T_k x) \pi_k^v$$

eine gültige lineare Ungleichung für alle zulässigen  $(x, \theta)$ ; und  $(x^v, \theta^v)$  ist gültig genau dann, wenn es diese Ungleichung erfüllt. Die Ungleichung ist somit der einzige zu testende Kandidat für einen Optimalitätsschnitt.

**Erzeugung von Gültigkeitsschnitten:** Wir wollen entscheiden, ob  $x^v \in \mathcal{K}_2$  liegt. Wenn nicht, suchen wir eine lineare Ungleichung, die für alle  $x \in \mathcal{K}_2$  gilt, aber von  $x^v$  verletzt wird.

$$\mathcal{K}_2 = \{x : \mathcal{Q}(x) < \infty\} = \{x : \forall k = 1, \dots, N \quad \exists y \geq 0 \text{ mit } Wy = h_k - T_k x\}.$$

Wir betrachten für alle  $k = 1, \dots, N$  das lineare Programm

$$\begin{aligned} w_k = \min \quad & \mathbf{1}^\top v^+ + \mathbf{1}^\top v^- \\ \text{s.d.} \quad & Wy + Iv^+ - Iv^- = h_k - T_k x^v \\ & y, v^+, v^- \geq 0. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$  und  $I$  die Einheitsmatrix. Falls  $w_k = 0$  ist für alle  $k = 1, \dots, N$  ist, existiert für alle  $k$  ein  $y \geq 0$  mit  $Wy = h_k - T_k x^v$ , d.h. es ist  $x \in \mathcal{K}_2$ .

Sei andernfalls  $w_k > 0$  für ein  $k$ . Dann betrachten wir wieder die optimale Lösung  $\pi^v$  des dualen Problems

$$\max_{\pi} \{(h_k - T_k x^v)^\top \pi : W^\top \pi \leq 0, -\mathbf{1} \leq \pi \leq \mathbf{1}\}.$$

Es gilt somit

$$(h_k - T_k x^v)^\top \pi^v = w_k > 0.$$

Aus  $W^\top \pi^v \leq 0$  folgt offensichtlich  $(\pi^v)^\top Wy \leq 0$  für alle  $y \geq 0$ . Da für  $x \in \mathcal{K}_2$  ein  $y \geq 0$  existiert mit  $Wy = h_k - T_k x$ , gilt also

$$(h_k - T_k x)^\top \pi^v \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{K}_2.$$

Also ist  $(h_k - T_k x)^\top \pi^v \leq 0$  eine lineare Ungleichung, die von  $x^v$  verletzt wird, aber für alle  $x \in \mathcal{K}_2$  gilt.

Wir testen also  $k = 1, \dots, N$ , bis zum ersten Mal  $w_k > 0$  gilt und berechnen dann die neue Ungleichung.

**Terminierung nach endlich vielen Schritten:** Bei den betrachteten dualen Programmen hängt nur die Zielfunktion von  $x^v$  ab. Für jedes  $k$  müssen also nur endlich viele Basislösungen betrachtet werden. D.h. es gibt nur endlich viele Gültigkeits- und endlich viele Optimalitätsschnitte, die alle höchstens einmal erzeugt werden müssen (danach bleiben sie erfüllt).

Warum ist die L-Methode dem Lösen von

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x + \sum_{k=1}^N p_k q_k^\top y_k \\ \text{s.d.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & T_k x + W y_k = h_k, \quad k = 1, \dots, N \\ & y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

vorzuziehen?

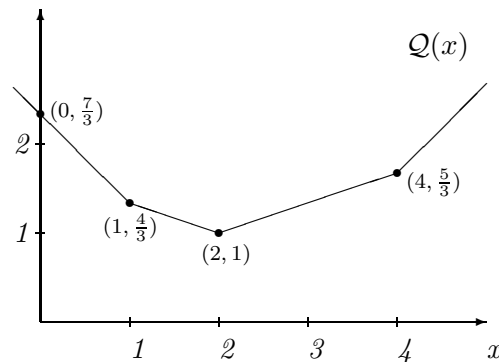
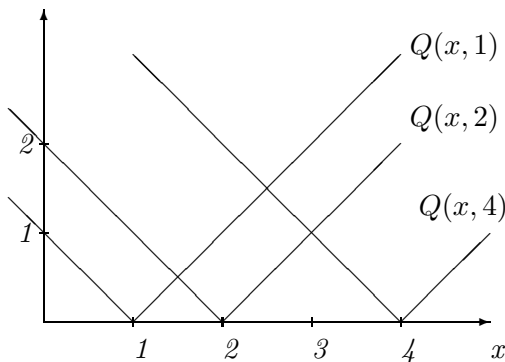
- Das Lösen von  $N$  kleinen LPs ist viel schneller als das Lösen eines  $N$ -mal größeren linearen Programms.
- Meistens wird nur ein kleiner Teil aller möglichen Schnitte hinzugefügt.
- Viele Tricks zur Beschleunigung sind bekannt.

**Beispiel 6.10** (Beispiel für Optimalitätsschnitte). *Wir betrachten die Aufgabe  $\min_x \{E_\xi(Q(x, \xi)) : 0 \leq x \leq 10\}$  mit*

$$Q(x, \xi) = \min_y \{y : y \geq x - \xi, y \geq \xi - x\} = |x - \xi|.$$

*Dabei sei  $\xi = 1, 2, 4$  je mit Wahrscheinlichkeit  $1/3$ . Dann ist also*

$$z(x) = \mathcal{Q}(x) = \frac{1}{3}(Q(x, 1) + Q(x, 2) + Q(x, 4)).$$



Wir bringen zunächst  $Q(x, \xi)$  in die Normalform

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) &= \min y \\ \text{s.d. } &y - x - s_1 = \xi \\ &y + x - s_2 = \xi \\ &y, s_1, s_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dann sind  $q = (1, 0, 0)^\top$ ,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(w) = \begin{pmatrix} -\xi(w) \\ \xi(w) \end{pmatrix}.$$

Das duale lineare Programm ist somit

$$(\star) \quad \begin{aligned} \max \quad &\pi^\top (h(w) - Tx) = \max \quad \pi_1(x - \xi) + \pi_2(\xi - x) \\ \text{s.d. } &\pi^\top W \leq q^\top \quad \text{s.d. } \quad \pi_1 + \pi_2 \leq 1 \\ &\pi_1, \pi_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Falls  $x \geq \xi$  gilt, ist  $\pi = (1, 0)$  die optimale Lösung von  $(\star)$ ; sonst ist  $\pi = (0, 1)$  optimal.

Das Problem im Schritt 0 der L-Methode ist

$$(\diamond) \quad \min_{\theta, x} \{\theta : 0 \leq x \leq 10\}.$$

Wir erzeugen nun Optimalitätsschnitte (Schritt 3):

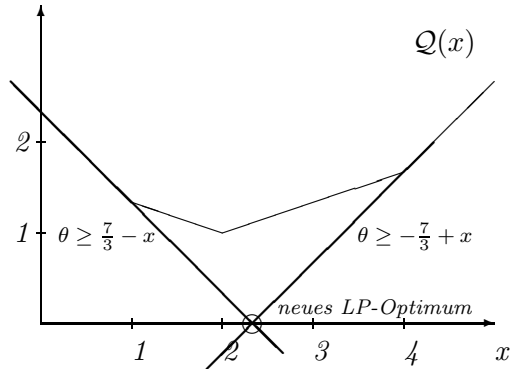
Sei am Anfang  $x^1 = 0$  und  $\theta^1 = -\infty$  (siehe Schritt 1). Wir lösen nun  $(\star)$  für  $x = x^1$  und  $\xi = 1, 2, 4$ . Die optimalen Lösungen sind  $\pi^1 = \pi^2 = \pi^3 = (0, 1)$  wegen  $x < \xi$ . Ein Optimalitätsschnitt ist also

$$\begin{aligned} \theta &\geq \sum_{k=1}^N p_k (h_k - Tx)^\top \pi^k \\ &= \frac{1}{3}(0, 1) \left[ \begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{7}{3} - x. \end{aligned}$$

Die Ungleichung  $\theta \geq \frac{7}{3} - x$  wird zu den Nebenbedingungen von  $(\diamond)$  hinzugefügt. In der nächsten Iteration ist  $x^2 = 10$ ,  $\theta^2 = -\frac{23}{3}$ . Es ist nun  $\pi = (1, 0)$  eine optimale Lösung von  $(\star)$ , da  $x^2 > 1, 2, 4$  ist. Somit erhalten wir als Optimalitätsschnitt

$$\begin{aligned} \theta &\geq \frac{1}{3}(1, 0) \left[ \begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3}(-1+x-2+x-4+x) = -\frac{7}{3} + x. \end{aligned}$$

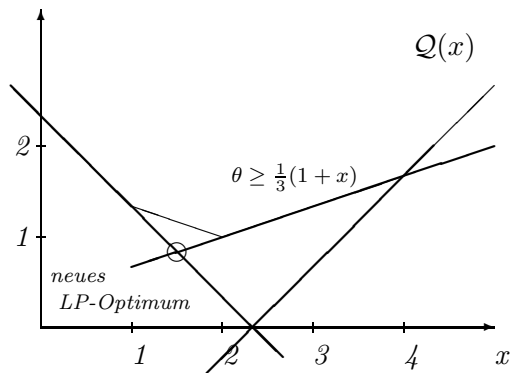
Die Ungleichung  $\theta \geq -\frac{7}{3} + x$  wird zu den Nebenbedingungen von  $(\diamond)$  hinzugefügt, weil sie durch  $(\theta^2, x^2)$  verletzt wird.



In der nächsten Iteration erhalten wir  $x^3 = 7/3$  und  $\theta^3 = 0$ . Dann ist  $\pi = (1, 0)$  optimale Lösung von  $(\star)$  für  $k = 1, 2$  wegen  $x^3 > 1, 2$ ; und  $\pi = (0, 1)$  ist optimal für  $k = 3$  wegen  $x^3 < 4$ . Somit erhalten wir als Optimalitätsschnitt

$$\begin{aligned} \theta &\geq \frac{1}{3}(1, 0) \left[ \begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{3}(0, 1) \left[ \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3}(-1+x-2+x+4-x) = \frac{1}{3}(1+x). \end{aligned}$$

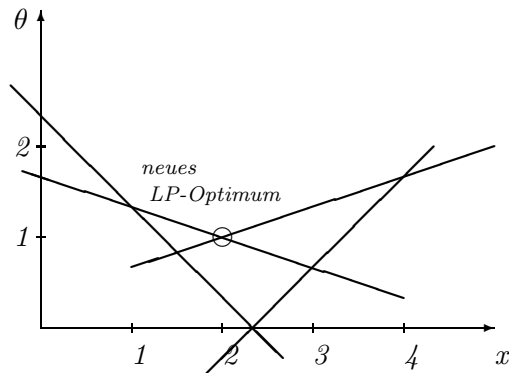
Die Ungleichung  $\theta \geq \frac{1}{3}(1+x)$  wird von  $(0, 7/3)$  verletzt. Wir fügen sie deshalb zu den Nebenbedingungen von  $(\diamond)$  hinzu.



In der nächsten Iteration erhalten wir  $x^4 = 3/2$  und  $\theta^4 = 5/6$ . Dann ist  $\pi = (1, 0)$  optimale Lösung von  $(\star)$  für  $k = 1$  wegen  $x^4 > 1$ ; und  $\pi = (0, 1)$  ist optimal für  $k = 2, 3$  wegen  $x^4 < 2, 4$ . Somit erhalten wir als Optimalitätsschnitt

$$\begin{aligned} \theta &\geq \frac{1}{3}(1, 0) \left[ \begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{3}(0, 1) \left[ \begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3}(-1+x+2-x+4-x) = \frac{1}{3}(5-x). \end{aligned}$$

Die Ungleichung  $\theta \geq \frac{1}{3}(5-x)$  wird von  $(\frac{5}{6}, \frac{3}{2})$  verletzt. Wir fügen sie deshalb zu den Nebenbedingungen von  $(\diamond)$  hinzu.



In der nächsten Iteration erhalten wir  $x^5 = 2$  und  $\theta^5 = 1$ . Die alte Lösung von  $(\star)$  bleibt optimal und somit auch der berechnete Schnitt. Dieser wird also nicht von  $(\theta^5, x^5)$  verletzt. Der Algorithmus stoppt nun, d.h.  $x^5 = 2$  ist die optimale Lösung mit  $Q(x^5) = \theta^5 = 1$ .

Bemerkung: Im letzten Schritt ist der berechnete Schnitt nicht eindeutig, denn für  $k = 2$  sind alle zulässigen Lösungen von  $(\star)$  optimal. (In  $x = 2$  hat die Funktion  $Q(x)$  unendlich viele Subgradienten.)

**Beispiel 6.11** (Beispiel für Gültigkeitsschnitte). Wir betrachten die Aufgabe  $\min_x \{3x_1 + 2x_2 + Q(x) : 0 \leq x\}$  mit

$$\begin{aligned}
 Q(x, \xi) = \min \quad & -15y_1 - 12y_2 \\
 \text{s.d.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \leq x_1 \\
 & 2y_1 + 5y_2 \leq x_2 \\
 & 0.8\xi_1 \leq y_1 \leq \xi_1 \\
 & 0.8\xi_2 \leq y_2 \leq \xi_2 \\
 & y_1, y_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\xi_1 = 4,6$  und  $\xi_2 = 4,8$  jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ . Insgesamt ist also  $N = 4$ .

In Schritt 0 der L-Methode wird die Aufgabe

$$(\diamond) \quad \min_{x, \theta} \{3x_1 + 2x_2 + \theta : 0 \leq x_1, x_2\}$$

gelöst. In Schritt 1 erhalten wir somit  $x^1 = (0, 0)$  und  $\theta = -\infty$ . Wir gehen nun zu Schritt 2. Dann suchen wir eine optimale Lösung  $\pi$  des dualen Problems

$$\begin{aligned}
 w = \max_{\pi} \quad & x_1\pi_1 + x_2\pi_2 + \xi_1\pi_3 + \xi_4\pi_4 - 0.8\xi_1\pi_5 - 0.8\xi_2\pi_6 \\
 \text{s.d.} \quad & 3\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 - \pi_5 = 0 \\
 (\star) \quad & 2\pi_1 + 5\pi_2 + \pi_4 - \pi_6 = 0 \\
 & -1 \leq \pi_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

Eine optimale Lösung für  $x^1 = (0, 0)$  und  $\xi = (6, 8)$  ist

$$\pi = \left(-\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, 0, 0, -1, -1\right)^\top \quad \text{mit} \quad w = 11.2 > 0.$$

Als Gültigkeitsschnitt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \pi^\top (h_k - Tx) &\leq 0 \\ \left(-\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, 0, 0, -1, -1\right)(x_1, x_2, 6, 8, -4.8, -6.4)^\top &\leq 0 \\ 123.2 &\leq 3x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Wir fügen also die Ungleichung  $123.2 \leq 3x_1 + x_2$  zur Aufgabe  $(\diamond)$  hinzu. In der nächsten Iteration erhalten wir dann  $x^2 = (41.067, 0)$  und  $\theta^2 = -\infty$ . Dann ist für  $x^2$  und  $\xi = (6, 8)$  der Vektor  $\pi = (0, -1/5, 0, 0, -2/5, -1)$  optimale Lösung von  $(\star)$ . Der zugehörige Gültigkeitsschnitt  $x_2 \geq 22.4$  wird zur Aufgabe  $(\diamond)$  hinzugefügt.

In der nächsten Iteration erhalten wir  $x^3 = (33.6, 22.4)$ . Der neue Gültigkeitsschnitt ist dann  $x_2 \geq 41.6$ . In der 4. Iteration ist  $x^4 = (27.2, 41.6)$ . Dieser Wert ist zulässig, d.h. alle optimalen Zielfunktionswerte der Aufgaben  $(\star)$  für die verschiedenen  $\xi$  sind Null. Es kann somit zu Schritt 3 übergegangen werden.

Das Beispiel 6.11 zeigt, dass in Schritt 2 der L-Methode oft viele Ungleichungen unnötigerweise erzeugt werden. Die genaue Betrachtung des Beispiels zeigt, dass  $x \in \mathcal{K}_2$  genau dann gilt, wenn  $Q(x, (6, 8)) < \infty$  ist. Es muss also  $0.8 \cdot 6 \leq y_1$  und  $0.8 \cdot 8 \leq y_2$  gelten und somit

$$\begin{aligned} x_1 \geq 3y_1 + 2y_2 &\implies x_1 \geq 18 \cdot 0.8 + 16 \cdot 0.8 = 27.2 \\ x_2 \geq 2y_1 + 5y_2 &\implies x_2 \geq 12 \cdot 0.8 + 40 \cdot 0.8 = 41.6. \end{aligned}$$

Also könnte man von Anfang an die Ungleichungen  $x_1 \geq 27.2$  und  $x_2 \geq 41.6$  zum Problem hinzufügen und viele Iterationen sparen.

Solche Nebenbedingungen heißen *induzierte Bedingungen*.

Für viele praktische Probleme gilt  $\mathcal{K}_2 = \mathbb{R}^{m_2}$  (vollständiger Rekurs, siehe Landwirtschaftsbeispiel) oder  $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$  (relativer vollständiger Rekurs). In beiden Fällen entfällt Schritt 2 der L-Methode.

Außerdem gibt es Probleme, bei denen Schritt 2 nur für ein einziges  $k$  getestet werden muss:

**Theorem 6.10.** Sei  $T$  von  $\xi$  unabhängig. Für alle  $t \geq 0$  sei  $Wy = t$  für ein  $y \geq 0$ . Falls ein  $l \in \{1, \dots, N\}$  existiert mit  $h_l \leq h_k$  für alle  $k = 1, \dots, N$ , so gilt  $x \in \mathcal{K}_2$  genau dann, wenn das System

$$Wy = h_l - Tx, \quad y \geq 0$$

erfüllbar ist.

*Beweis.* Sei  $x \in \mathcal{K}_2$ . Dann folgt aus der Definition von  $\mathcal{K}_2$ , dass das System erfüllbar ist.

Sei  $Wy = h_l - Tx$  mit  $y \geq 0$ . Dann gilt

$$h_k - Tx \geq h_l - Tx = Wy \quad \text{für alle } k = 1, \dots, N$$

wegen  $h_l \leq h_k$ . Also ist  $Wy + s = h_k - Tx$  für alle  $k$  mit  $s \geq 0$ . Nach Voraussetzung ist  $Wy' = s$  für ein  $y' \geq 0$ . Also gilt

$$h_k - Tx = Wy + Wy' = W(y + y') \quad \text{mit } y + y' \geq 0.$$

□

**Die Multischnittvariante:** Bei der Multischnittvariante verwenden wir statt  $\theta$  für  $Q(x)$  je eine Variable  $\theta_k$  für  $Q(x, \xi_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Gegebenenfalls wird in jeder Iteration je ein Qualitätsschnitt je  $\theta_k$  erzeugt.

Das Ziel ist eine bessere Annäherung der Funktion  $Q(x)$ ; einzelne Schnitte sind im Allgemeinen deutlich stärker als ihre Summe.

**Schritt 0:** Setze  $v := 0$  und sei  $\mathcal{L}$  das folgende lineare Programm

$$\min \{ c^\top x + \sum_{k=1}^N p_k \theta_k : Ax = b, x \geq 0 \}.$$

**Schritt 1:** Setze  $v := v + 1$  und löse die Aufgabe  $\mathcal{L}$ . Falls ein  $\theta_k$  nicht nach unten beschränkt ist, setze  $\theta_k^v := -\infty$  und löse  $\mathcal{L}$  ohne  $\theta_k$ . Falls  $\mathcal{L}$  unzulässig ist, dann STOPP: Das Problem (SLP) ist unzulässig. Sei  $(x^v, \theta^v)$  die gefundene Optimallösung (evtl. mit  $\theta_k^v = -\infty$ ).

**Schritt 2:** Erzeuge Gültigkeitsschnitte wie bisher.

**Schritt 3:** Für alle  $k = 1, \dots, N$  sei  $\pi_k$  wie bisher die optimale Lösung des dualen Problems. Füge jede Ungleichung

$$\theta_k \geq \pi_k^\top (h_k - T_k x)$$

zu  $\mathcal{L}$  hinzu, die von  $(\theta_k^v, x^v)$  verletzt wird. Falls keine Ungleichung verletzt ist, Stopp:  $x^v$  ist optimal. Andernfalls gehe zu Schritt 1.

**Beispiel 6.12.** Wir betrachten wieder die Aufgabe  $\min\{Q(x) : 0 \leq x \leq 10\}$  aus Beispiel 6.10 mit  $Q(x, \xi) = |x - \xi|$  und  $\xi = 1, 2, 4$  jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/3$ . Die Aufgabe  $\mathcal{L}$  in Schritt 0 ist nun

$$\min_{\theta_k, x} \left\{ \frac{1}{3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) : 0 \leq x \leq 10 \right\}.$$

Die erste Lösung dieser Aufgabe ist  $(\theta_1^1, \theta_2^1, \theta_3^1, x^1) = (-\infty, -\infty, -\infty, 0)$ . Es werden nun Optimalitätsschnitte berechnet. Die duale Optimallösung hierbei ist  $\pi_k = (0, 1)$  für  $k = 1, 2, 3$ . Die Optimalitätsschnitte sind also

$$\theta_1 \geq 1 - x, \quad \theta_2 \geq 2 - x \quad \text{und} \quad \theta_3 \geq 4 - x.$$

(Beim bisherigen Verfahren wurde hier der Durchschnitt gebildet:  $\theta = \frac{1}{3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \geq \frac{7}{3} - x$ .)

Die Optimalitätsschnitte werden also zu  $\mathcal{L}$  hinzugefügt. Die neue Optimallösung von  $\mathcal{L}$  ist nun  $(-9, -8, -6, 10)$ .

Es werden wieder Optimalitätsschnitte berechnet. Nun ist die duale Optimallösung  $\pi_k = (1, 0)$  für  $k = 1, 2, 3$ . Die Optimalitätsschnitte sind also

$$\theta_1 \geq -1 + x, \quad \theta_2 \geq -2 + x \quad \text{und} \quad \theta_3 \geq -4 + x.$$

Die neue Optimallösung von  $\mathcal{L}$  ist nun  $(1, 0, 2, 2)$ . Es existieren keine verletzten Optimalitätsschnitte mehr. Der Algorithmus stoppt also mit einer Optimallösung  $x^3 = 2$ .

Bei der Multischnittvariante werden meist weniger Iterationen benötigt, aber mehr Ungleichungen hinzugefügt. Dies kann, abhängig vom betrachteten Problem, besser oder schlechter als die L-Methode sein.

**Die L-Methode für ganzzahlige stochastische Programme:** Das beschriebene Verfahren kann auch für ganzzahlige Programme verallgemeinert werden, muss dann aber mit Branch-and-Cut Verfahren oder ähnlichen Methoden verknüpft werden. Diese Verfahren sind aufwendig und bis jetzt wenig erforscht.