
Vorlesungsskript

Robuste Optimierung

In der Optimierung bestimmt man im Allgemeinen optimale Lösungen in der Annahme, dass die Eingabedaten exakt bekannt sind. In der Praxis ist dies jedoch häufig nicht der Fall, da Messfehler, Rundungsfehler oder andere Unsicherheiten in den Problem Daten auftreten können. So kann es sein, dass eine Problemlösung bei etwas geänderten Eingabedaten unbrauchbar wird, da sie sehr weit von der realen Lösung entfernt liegt oder gar für das Problem unzulässig ist.

Einen Ausweg aus dieser Situation bietet die robuste Optimierung. Hier werden zusätzlich zu den Eingabedaten Toleranzen angegeben. Gesucht wird eine möglichst gute Lösung, welche für alle innerhalb der Toleranzen liegenden Eingabewerte zulässig ist.

Das vorliegende Vorlesungsskript wurde anhand des 1. Teils der Vorlesung „Robuste Optimierung“ erstellt, welcher im April und Mai 2008 an der Universität zu Köln gelesen wurde. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit oder vollständige Übereinstimmung mit der Vorlesung erhoben.

erstellt von: Dr. Diana Fanghänel

Köln, den 04. Juni 2006

¹{buchheim|liers|fanghaenel}@informatik.uni-koeln.de
Hinweise bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden Sie unter :
http://www.informatik.uni-koeln.de/ls_juenger/teaching/ss_08/

Erratum zur Vorlesung

- In Beispiel 3.2 wurde in der Vorlesung vergessen, die Kegelbedingungen mit in die Betrachtungen einzubeziehen.

Inhaltsverzeichnis

0	Was ist robuste Optimierung?	4
0.1	Grundlegende Annahmen der robusten Optimierung	4
0.2	Die Modellierung nach Soyster (1973) für lineare Optimierungsaufgaben	5
1	Von linearer zu konischer Optimierung	7
1.1	Wiederholung zu linearen Optimierungsaufgaben	7
1.2	Dualitätsbetrachtungen	7
1.3	Dualität bei linearen Optimierungsaufgaben	8
1.4	Halbordnungen und Kegel	10
1.5	Konische Dualität	12
2	Robustheit von konischen Optimierungsproblemen	16
2.1	Robuste Lösbarkeit	16
2.2	Anwendung der konischen Optimierung: Robuste lineare Optimierung	19
2.3	Anwendungsbeispiel: Robuste Synthese von Phased-Array Antennen	20
3	Robuste Modellierung allgemeiner Unsicherheitsmengen	23
3.1	Repräsentierung von Ungleichungssystemen	23
3.2	Beispielaufgaben	27
3.3	Robuste Modellierung von Zufallsungleichungen	29
3.4	Globalisierte robuste Modellierung linearer Optimierungsprobleme	34

0 Was ist robuste Optimierung?

Angenommen, wir lösen ein lineares Optimierungsproblem $\min\{c^\top x : Ax = b\}$, das von einer Anwendung motiviert ist. x^* sei das Optimum. Dann kommt es häufig vor, dass die Eingabewerte A , c und b nicht genau bekannt sind oder nicht genau gemessen oder eingegeben werden können. Häufig werden diese Fehler in den Eingabedaten einfach ignoriert, und das Problem wird für eine bestimmte „nominale“ Eingabe gelöst. Ein so berechnete Lösung wird auch als nominales Optimum bezeichnet.

Aber: In einigen Situationen führen kleine Änderungen in den Eingabewerten dazu, dass das Optimum x^* in der Praxis unzulässig oder sehr teuer wird, und damit unbrauchbar.

Eine Fallstudie hierzu wurde von Ben-Tal et al. mit der NETLIB (einer im Netz verfügbaren Bibliothek mit realen und konstruierten linearen Optimierungsaufgaben) durchgeführt. Dabei wurden zunächst die Optima für die Instanzen aus der NETLIB bestimmt. Anschließend wurden zufällig Koeffizienten perturbiert und die neuen Optima ermittelt. Das Ergebnis war, dass bei 13% der Probleme eine Perturbation von 0.01% dazu führte, dass das nominale Optimum die neuen Ungleichungen stark verletzt.

Einen möglichen Ausweg hierzu bietet die **stochastische Optimierung**. Dabei werden „bedeutende“ Datenunsicherheiten i.a. stochastisch modelliert. Jedoch ist häufig die Verteilung der Eingabedaten unbekannt.

Das Ziel der **robusten Optimierung** ist es, die Unsicherheit der Daten schon in die Modellierung des Problems mit aufzunehmen. Im Unterschied zur stochastischen Optimierung wird jedoch nicht unbedingt angenommen, dass die Daten einer bestimmten Verteilung genügen. Der „Preis der Robustheit“, d.h. die Verschlechterung der Zielfunktion, soll nicht zu hoch sein.

0.1 Grundlegende Annahmen der robusten Optimierung

Annahme 1: Die unsicheren Daten sind unbekannt, aber beschränkt. D.h., es läßt sich eine beschränkte Menge $U \subset \mathbb{R}^M$ der möglichen Eingabewerte festlegen.

Annahme 2: Die (Un)gleichungen in U sind bindend, d.h. wenn die Eingabe in U liegt, können wir keine Verletzung der angegebenen Restriktionen tolerieren.

Ein Lösungsvektor heißt **robust** zulässig, wenn er für alle Inputwerte aus U zulässig ist.

Wir werden Optimierungsprobleme der folgenden Art betrachten:

$$(P_U) \quad \min\{f(x, \zeta) : \zeta \in U, F(x, \zeta) \in K\}$$

mit den Inputdaten ζ , der Unsicherheitsmenge U und dem Zulässigkeitsbereich K der Lösung.

Definition 0.1. x heißt **robust zulässig**, genau dann wenn $F(x, \zeta) \in K$ ist für alle Eingabedaten $\zeta \in U$.

x heißt **robust optimal**, genau dann wenn x robust zulässig ist und den kleinsten garantierten Zielfunktionswert besitzt, d.h., wenn x das folgende Optimierungsproblem löst:

$$(RP_U) \quad \min_{x,t} \{t : f(x, \zeta) \leq t, F(x, \zeta) \in K \text{ für alle } \zeta \in U\}.$$

Aufgaben von der Form (RP_U) bezeichnet man als semi-infinite Optimierungsaufgaben. Da sie i.a. unendlich viele Nebenbedingungen haben, sind sie meist schwer zu lösen. Dennoch gibt es einige Spezialfälle, für welche man (RP_U) gut lösen kann, z.B. für lineare, konische und semi-definite Optimierungsaufgaben (P_U) .

Werden z.B. die Aufgaben der NETLIB-Bibliothek auf diese Weise mit 0.01% Unsicherheit in den Daten berechnet, verliert man maximal 1% des ursprünglichen Zielfunktionswertes, d.h. die berechnete Lösung ist für die nominale Ausgangsaufgabe fast optimal.

0.2 Die Modellierung nach Soyster (1973) für lineare Optimierungsaufgaben

Wir betrachten die lineare Optimierungsaufgabe

$$\max\{c^\top x : Ax \leq b\}.$$

Dabei nehmen wir an, dass die Unsicherheit in den Daten nur die Elemente der Matrix A betrifft. O.B.d.A. sind die Kostenvektor c und die rechte Seite b nicht betroffen, denn falls eine Unsicherheit in c auftritt, so können wir die äquivalente Aufgabe

$$\max\{z : Ax \leq b, z - c^\top x \leq 0\}$$

betrachten.

Es sei nun $a^\top x \leq b'$ eine der linearen Ungleichungen in $Ax \leq b$. Für diese Ungleichung betrachten wir alle Perturbierungen der Daten in einer Box

$$W = \{a \in \mathbb{R}^n : \bar{a}_j - \Delta a_j \leq a_j \leq \bar{a}_j + \Delta a_j, j = 1, \dots, n\}.$$

D.h. die Einträge der Matrix sind als symmetrische und beschränkte Zufallszahlen modelliert.

Es gilt nun

$$a^\top x \leq b' \quad \forall a \in W \quad \Leftrightarrow \quad \max_{a \in W} a^\top x \leq b'.$$

Der optimale Zielfunktionswert der Aufgabe $\max_{a \in W} a^\top x$ darf also den Wert b' nicht überschreiten. Dies entspricht der folgenden linearen Optimierungsaufgabe mit fixierten x , \bar{a} und Δa sowie dem Lösungsvektor a :

$$\max_a \{x^\top a : a \leq \bar{a} + \Delta a, -a \leq -\bar{a} + \Delta a\}.$$

Die duale Aufgabe hierzu ist

$$\min_{r,s} \{\bar{a}^\top (r - s) + (\Delta a)^\top (r + s) : r - s = x, r, s \geq 0\}.$$

Wegen $\max_{a \in W} a^\top x \leq b'$ ist also der Vektor x robust zulässig, wenn das folgende System lösbar ist (d.h. Vektoren r, s existieren):

$$\begin{aligned} (\bar{a} + \Delta a)r - (\bar{a} - \Delta a)s &\leq b' \\ r - s &= x \\ r, s &\geq 0 \end{aligned}$$

Diese Betrachtungen kann man leicht auf mehrere Ungleichungen verallgemeinern. Ein Vektor x ist somit robust zulässig, wenn Vektoren r, s existieren, welche die folgenden Ungleichungen lösen:

$$\begin{aligned} (\bar{A} + \Delta A)r - (\bar{A} - \Delta A)s &\leq b \\ r - s &= x \\ r, s &\geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 0.1. *Wir betrachten die lineare Optimierungsaufgabe*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

mit $\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = 1$.

Dann entspricht dies der folgenden robusten linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\rightarrow \max \\ (3, 2, 2)r - (1, 0, 0)s &\leq 5 \\ r - s &= x \\ x, r, s &\geq 0. \end{aligned}$$

Diese Optimierungsaufgabe besitzt als optimale Lösung $x_3 = r_3 = 2.5$, $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = r_1 = r_2 = 0$ mit dem optimalen Zielfunktionswert 7.5.

1 Von linearer zu konischer Optimierung

1.1 Wiederholung zu linearen Optimierungsaufgaben

Wir betrachten die lineare Optimierungsaufgabe

$$(LP) \quad \min_x \{c^\top x : Ax \geq b\}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$. Der Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ gibt die Koeffizienten der Zielfunktion

$$c^\top x := \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

an. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Matrix der Nebenbedingungen und $b \in \mathbb{R}^m$ die rechte Seite der Nebenbedingungen.

Die Aufgabe (LP) heißt

- **zulässig**, wenn der zulässige Bereich $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax - b \geq 0\}$ nicht leer ist; sonst heißt die Aufgabe unzulässig.
Die Elemente $x \in \mathcal{F}$ heißen zulässig für (LP) .
- **beschränkt**, wenn (LP) entweder unzulässig ist oder ein $k \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $k < c^\top x$ für alle $x \in \mathcal{F}$ gilt.

Sei (LP) beschränkt. Dann existiert ein optimaler Zielfunktionswert

$$c^* := \inf_x \{c^\top x : Ax \geq b\}.$$

Ist $\mathcal{F} = \emptyset$, so wird $c^* = \infty$ gesetzt. Ist (LP) unbeschränkt, so ist $c^* = -\infty$.

Die Aufgabe (LP) heißt lösbar, wenn sie zulässig und beschränkt ist. In diesem Fall wird der optimale Zielfunktionswert angenommen, d.h. es existiert ein $x^* \in \mathcal{F}$ mit $c^\top x^* = c^*$. Ein solches x^* heißt optimale Lösung von (LP) .

Dies ist bei nichtlinearen Optimierungsaufgaben i.a. nicht der Fall. Zum Beispiel ist die Aufgabe $\min_x \{1/x : x \geq 1\}$ zulässig und beschränkt mit dem optimalen Zielfunktionswert 0. Dieser optimale Zielfunktionswert wird jedoch in keinem zulässigen Punkt angenommen.

1.2 Dualitätsbetrachtungen

Gegeben sei zunächst eine Optimierungsaufgabe $\min_x \{f(x) : x \in X\}$ mit einem zulässigen Bereich

$$X = \{x : g_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Wie kann man für den optimalen Zielfunktionswert

$$f^* = \inf_x \{f(x) : g_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m\}.$$

systematisch untere Schranken bestimmen? Bei linearen Optimierungsaufgaben (LP) ist dabei $g_i(x) = a_i^\top x$ für $i = 1, \dots, m$.

Wir betrachten hierfür zunächst das folgende Beispiel:

Beispiel 1.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{2007} + x_{2008} \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 + \dots + 2007x_{2007} + 2008x_{2008} \geq 1 \\ 2008x_1 + 2007x_2 + \dots + 2x_{2007} + x_{2008} \geq 100 \end{cases}$$

Durch Addition der beiden Nebenbedingungen erhält man

$$2009(x_1 + x_2 + \dots + x_{2007} + x_{2008}) \geq 101.$$

Diese Ungleichung ist durch alle zulässigen Lösungen erfüllt. Somit ist der optimale Zielfunktionswert $\geq \frac{101}{2009}$.

Es ist also sinnvoll, Linearkombinationen $g_1(x)y_1 + g_2(x)y_2 + \dots + g_m(x)y_m$ der Nebenbedingungen zu untersuchen mit $y_1, \dots, y_m \geq 0$. Es sei nun also ein Vektor $y \in \mathbb{R}_+^m$ gegeben. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^m g_i(x)y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i.$$

Wenn nun $y \in \mathbb{R}_+^m$ so gewählt wird, dass $\sum_{i=1}^m g_i(x)y_i \leq f(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist $f(x) \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$. Demzufolge ist $\sum_{i=1}^m b_i y_i$ eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert f^* .

Wie man nun leicht sieht, ist die beste derartige untere Schranke der optimale Zielfunktionswert der Optimierungsaufgabe

$$(DOA) \quad \max_y \left\{ \sum_{i=1}^m b_i y_i : y \geq 0, \sum_{i=1}^m g_i(x)y_i \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

1.3 Dualität bei linearen Optimierungsaufgaben

Es soll nun eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert c^* der Aufgabe (LP) ermittelt werden. Hierfür ersetzen wir in der Aufgabe (DOA)

$f(x) := c^\top x$ und $g_i(x) = a_i^\top x$, wobei a_i die i -te Zeile der Matrix A sei. Dann entspricht (DOA) der folgenden linearen Optimierungsaufgabe

$$(D) \quad \max_y \{b^\top y : A^\top y = c, y \geq 0\}.$$

Die Aufgabe (D) heißt **duale Aufgabe** zur linearen Optimierungsaufgabe (LP). Aufgrund der Konstruktion gilt:

1. Die duale Aufgabe der linearen Optimierungsaufgabe (D) ist wieder (LP).
2. Es gilt **schwache Dualität**, d.h. es ist

$$b^\top y \leq c^\top x \quad \text{für alle } x \in X \text{ und alle } y \geq 0 \text{ mit } A^\top y = c.$$

3. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - (a) (LP) ist zulässig und beschränkt nach unten.
 - (b) (D) ist zulässig und beschränkt nach oben.
 - (c) (LP) ist lösbar.
 - (d) (D) ist lösbar.
 - (e) (LP) und (D) sind beide zulässig.
4. Es gilt **starke Dualität**, d.h. es existiert eine zulässige Lösung x^* für (LP) und eine zulässige Lösung y^* für (D) mit $c^\top x^* = b^\top y^*$.

Beweis. Siehe Standardlehrbücher zur linearen Optimierung! □

Theorem 1.1 (komplementärer Schlupf). *Sei x zulässig für (LP) und y zulässig für (D). Dann sind x und y genau dann optimal für (LP) bzw. (D), wenn*

$$y_i(a_i^\top x - b_i) = 0 \quad \text{ist für alle } i = 1, \dots, n$$

oder genauso, wenn

$$c^\top x - b^\top y = 0 \quad \text{ist.} \quad (\text{keine Dualitätslücke}).$$

Bemerkungen: Die linearen Optimierungsaufgaben (LP) und (D) können in polynomieller Zeit gelöst werden (Ellipsoidmethode). In der Praxis wird jedoch meist das Simplexverfahren genutzt. Dieses besitzt eine exponentielle Laufzeit im worst-case, ist aber in der Praxis i.a. sehr schnell.

kommerzielle Software:

- CPLEX (ILOG)
- open source: Clp (siehe www.coin-or.org)

1.4 Halbordnungen und Kegel

Lineare Optimierungsprobleme besitzen viele schöne Eigenschaften (z.B. die starke Dualität). Es konnte gezeigt werden, dass dies u.a. auch mit den Eigenschaften der zugrunde liegenden Halbordnung „ \geq “,

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geq b_i \quad \text{für alle } i,$$

zusammenhängt. Diese Eigenschaften sind die folgenden:

- (R1) **Reflexivität:** Es gilt $a \geq a$ für alle a .
- (R2) **Antisymmetrie:** Aus $a \geq b$ und $b \geq a$ folgt $a = b$.
- (R3) **Transitivität:** Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$.
- (R4) **Verträglichkeit mit linearen Operatoren:**
 - (a) *Homogenität:* Aus $a \geq b$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$ folgt $\lambda a \geq \lambda b$.
 - (b) *Additivität:* Aus $a \geq b$ und $c \geq d$ folgt $a + c \geq b + d$.

Diese Eigenschaften sind auch für andere Halbordnungen erfüllt. Z.B. kann auf der Menge der quadratischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Halbordnung \succeq eingeführt werden mit

$$A \succeq B \quad \Leftrightarrow \quad A - B \quad \text{positiv semidefinit.}$$

Wir möchten nun Nichtlinearitäten zulassen, und dabei aber möglichst viel von der Dualitätstheorie behalten.

Hierfür betrachten wir eine Halbordnung \succeq , welche die Eigenschaften (R1)-(R4) besitzt. Wir wollen nun in der Aufgabe (LP) die Halbordnung \geq durch \succeq ersetzen.

Als erstes benötigen wir eine alternative Formulierung für die Halbordnung \succeq . Hierfür betrachten wir einen Kegel

$$K_{\succeq} := \{a \in \mathbb{R}^n : a \succeq 0\}.$$

Es gilt nun offensichtlich

$$a \succeq b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \succeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in K_{\succeq}.$$

Die Halbordnung \succeq erfüllt die Eigenschaften (R1)-(R4) genau dann, wenn der Kegel K_{\succeq} die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (K1) Der Kegel K_{\succeq} ist nichtleer und abgeschlossen unter Addition, d.h. aus $a, a' \in K_{\succeq}$ folgt $a + a' \in K_{\succeq}$.

(K2) K_{\succeq} ist eine konische Menge, d.h. aus $a \in K_{\succeq}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$ folgt $\lambda a \in K_{\succeq}$.

(K3) Der Kegel K_{\succeq} ist *spitz*, d.h. aus $a \in K_{\succeq}$ und $-a \in K_{\succeq}$ folgt $a = 0$.

Umgekehrt definiert jeder Kegel mit den Eigenschaften (K1), (K2) und (K3) eine Halbordnung mit den Eigenschaften (R1)-(R4).

Beweis. Einfache Übungsaufgabe! □

Beispiel 1.2. Es sei \geq die gewöhnliche koordinatenweise Ordnung im \mathbb{R}^n . Dann ist der zugeordnete Kegel K_{\geq}

$$K_{\geq} = \{x : x \geq 0\} = \mathbb{R}_+^n.$$

Dieser Kegel besitzt die Eigenschaften (K1)-(K3).

Zusätzlich ist K_{\geq} abgeschlossen, d.h. wenn eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset K_{\geq}$ gegen einen Grenzwert a^* konvergiert, so ist $a^* \in K_{\geq}$.

Weiter hat K_{\geq} ein nichtleeres Inneres, d.h. es existieren ein $\epsilon > 0$ und ein $v^* \in K_{\geq}$, so dass alle v mit $\|v - v^*\| < \epsilon$ auch in K_{\geq} liegen.

Weitere für uns interessante Kegel sind die folgenden:

- Lorentzkegel $L^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i)^2}\}$.
- Kegel der positiv semidefiniten $n \times n$ Matrizen
(Eine Matrix A heißt positiv semidefinit, genau dann wenn A symmetrisch ist ($A = A^\top$) und nur nichtnegative Eigenwerte hat (d.h. es ist $x^\top A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$).

Es sei nun K ein Kegel mit den Eigenschaften (K1)-(K3), und es sei \geq_K die zugeordnete Halbordnung. Dann bezeichnet man Optimierungsaufgaben der Form

$$\min_x \{c^\top x : Ax \geq_K b\}$$

als **konische Optimierungsprobleme**. Bedeutende Spezialfälle hiervon sind die lineare Optimierung, die konische quadratische Optimierung und die semidefinite Optimierung.

konische quadratische Optimierung: Die Aufgabe

$$\min_x \{c^\top x : \|D_l x + d_l\| \leq e_l^\top x + f_l, l = 1, \dots, k\}$$

ist äquivalent zur Aufgabe

$$\min_x \left\{ c^\top x : Ax - b \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 x + d_1 \\ e_1^\top x + f_1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} D_k x + d_k \\ e_k^\top x + f_k \end{pmatrix} \end{pmatrix} \geq_K 0 \right\},$$

wobei K hier ein Kreuzprodukt von Lorentzkegeln $K = L_1^n \times \dots \times L_k^n$ ist.

semidefinite Optimierung:

$$\min_x \{ c^\top x : Ax - B \equiv x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n - B \succeq 0 \},$$

wobei \succeq hier die zum Kegel der positiv semidefiniten Matrizen gehörende Halbordnung sei.

Wir wollen nun Dualitätssätze für konische Optimierungsprobleme angeben.

1.5 Konische Dualität

Genau wie bei der linearen Optimierung suchen wir eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert eines konischen Programms

$$\min_x \{ c^\top x : Ax - b \geq_K 0 \}.$$

In Analogie zu linearen Optimierungsaufgaben stellt sich nun die folgende Frage:

Mit welchen Vektoren y darf man $Ax \geq_K b$ skalar multiplizieren, so dass $y^\top Ax \geq y^\top b$ gilt?

Im Fall $K = \mathbb{R}_+^n$ (lineare Optimierung) sind dies alle $y \in \mathbb{R}_+^m$. Das nächste Beispiel zeigt jedoch, dass bei anderen Kegeln die Vektoren $y \geq 0$ i.a. nicht genommen werden können.

Beispiel 1.3 (Lorentzkegel). Die Ungleichung $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq_{L^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stimmt, da

wegen $2 \geq \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$ auch $(-1, -1, 2)^\top \in L^3$ gilt. Wir betrachten nun den Vektor $y = (1, 1, 0.1)^\top \geq 0$. Dann ist $(-1, -1, 2)y = -1 - 1 + 0.2 = -1.8 < 0$, d.h. der Vektor y darf bei Lorentzkegeln nicht verwendet werden.

Welche Vektoren $y \in \mathbb{R}^m$ darf man also bei einem gegebenen Kegel K wählen, so dass gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^m : a \geq_K b \implies y^\top a \geq y^\top b$$

Antwort: Dies sind alle Vektoren y , für welche $y^\top a \geq 0$ für alle a mit $a \geq_K 0$ gilt.

Beweis. Übungsaufgabe!

□

Dementsprechend definieren wir den sogenannten dualen Kegel

$$K_* := \{y \in \mathbb{R}^m : y^\top x \text{ für alle } x \in K\}.$$

Theorem 1.2. *Ist $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ein nichtleerer, abgeschlossener, spitzer Kegel mit nichtleerem Inneren, so gilt dasselbe auch für den dualen Kegel K_* , und es ist $(K_*)_* = K$.*

Wir betrachten nun die konische Optimierungsaufgabe

$$(KP) \quad \min_x \{c^\top x : Ax - b \geq_K 0\}.$$

Dann gilt also für alle $y \in K_*$ und alle zulässigen x die Ungleichung

$$(A^\top y)^\top x \leq b^\top y.$$

Wählen wir nun $y \in K_*$ so dass $c = A^\top y$ gilt, dann erhalten wir also eine untere Schranke für (KP). Das folgende duale Optimierungsproblem bestimmt die beste dieser unteren Schranken:

$$(DKP) \quad \max_y \{b^\top y : A^\top y = c, y \geq_{K_*} 0\}.$$

Aufgrund der Konstruktion gilt der **schwache Dualitätssatz für konische Optimierungsprobleme**:

Theorem 1.3. *Seien $x \in K$ und $y \in K_*$ mit $Ax - b \geq_K 0$ und $A^\top y = c$. Dann ist $c^\top x \geq b^\top y$. Die Dualitätslücke $c^\top x - b^\top y$ ist nichtnegativ.*

Beispiel 1.4 (Steinersummenproblem). *Es werden m Ölbohrungen an den Orten $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^2$ durchgeführt. Wo sollte der Ölsammelbehälter aufgestellt werden, so dass die Gesamtlänge der Pipelines, die die a_i mit dem Behälter verbinden, minimal wird?*

Dies entspricht der Optimierungsaufgabe $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_2$ oder äquivalent hierzu

$$(S) \quad \min \sum_{i=1}^m t_i \\ \|a_i - x\|_2 \leq t_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Es gilt dabei

$$\|a_i - x\|_2 \leq t_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - a_i \\ t_i \end{pmatrix} \in L^3 \quad (\text{Lorentzkegel}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} \geq_{L^3} \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht nun die duale Aufgabe von (S) aus? Es gilt $L_*^3 = L^3$, d.h. der Lorentzkegel ist selbstdual. Weiter seien $\begin{pmatrix} \xi_i \\ \tau_i \end{pmatrix} \in L^3$, $i = 1, \dots, m$, die Variablen der dualen Aufgabe. Dann gilt $\xi_i^\top x + \tau_i t_i \geq \xi_i^\top a_i$. Durch Summation aller Ungleichungen erhalten wir nun

$$\sum_{i=1}^m \xi_i^\top x + \tau_i t_i \geq \sum_{i=1}^m \xi_i^\top a_i.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung soll nun den Wert $\sum_{i=1}^m t_i$ erhalten. Die rechte Seite der Ungleichung soll maximiert werden.

Somit soll $\sum_{i=1}^m \xi_i^\top x + \tau_i t_i = \sum_{i=1}^m t_i$ sein für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und alle zulässigen t_i . Hieraus folgt nun offensichtlich

$$\sum_{i=1}^m \xi_i = 0 \quad \text{und} \quad \tau_i = 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Weiter entspricht

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \tau_i \end{pmatrix} \in L^3 \quad \text{der Bedingung} \quad 1 = \tau_i \geq \|\xi_i\|_2.$$

Somit ist die konisch duale Aufgabe

$$\max_{\xi_i} \left\{ \sum_{i=1}^m a_i^\top \xi_i \mid \sum_{i=1}^m \xi_i = 0, \|\xi_i\|_2 \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, m \right\}.$$

Ein konisches Optimierungsproblem heißt **stark zulässig**, wenn es einen **zulässigen Punkt im Inneren des Kegels** K gibt.

Theorem 1.4 (starker Dualitätssatz der konischen Optimierung). *Wir betrachten ein konisches Optimierungsproblem*

$$(KP) \quad c^* = \min_x \{c^\top x : Ax \geq_K b\}$$

zusammen mit seinem dualen Problem

$$(DKP) \quad b^* = \max_y \{b^\top y : A^\top y = c, y \geq_{K^*} 0\}.$$

Dann gilt:

1. Die Dualität ist symmetrisch, d.h. das duale Problem zu (DKP) ist wieder das primale Problem (KP).
2. Wenn das primale Problem (KP) nach unten beschränkt und stark zulässig ist, dann ist das duale Problem (DKP) lösbar und $c^* = b^*$.

3. Wenn das duale Problem (DKP) nach oben beschränkt und stark zulässig ist, dann ist das primale Problem (KP) lösbar und $c^* = b^*$.
4. Sind sowohl das primale als auch das duale Problem stark zulässig, so sind beide Probleme lösbar und die optimalen Zielfunktionswerte sind gleich, d.h. $c^* = b^*$.

Folgerung 1.5. Seien das primale oder das duale Problem stark zulässig und beschränkt. Ein Paar von primal bzw. dual zulässigen Lösungen (x, y) ist genau dann optimal, wenn

1. die Dualitätslücke Null ist, d.h. $c^\top x - b^\top y = 0$, beziehungsweise wenn
2. $y^\top (Ax - b) = 0$ gilt (komplementärer Schlupf).

Bei der konischen Dualität wird also (im Gegensatz zur linearen Optimierung) stets die starke Zulässigkeit gefordert. Doch benötigen wir die starke Zulässigkeit wirklich?

Beispiel 1.5. Gegeben sei das folgende Problem:

$$\begin{aligned}
 & \min_{x_1, x_2, x_3} \left\{ x_1 : Ax - b \equiv \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \geq_{L^3} 0 \right\} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \min_{x_1, x_2, x_3} \left\{ x_1 : \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 1} \leq x_1 + x_2 \right\} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \min_{x_1, x_2, x_3} \left\{ x_1 : 1 \leq 4x_1x_2, x_1 + x_2 \geq 0 \right\} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \min_{x_1, x_2, x_3} \left\{ x_1 : 1 \leq 4x_1x_2, x_1, x_2 > 0 \right\}
 \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Problem $\min\{x_1 : x_1 > 0, x_2 \geq 1/(4x_2)\}$. Bei dieser Aufgabe ist offensichtlich der Zielfunktionswert durch Null beschränkt. Ausserdem ist die Aufgabe stark zulässig (siehe $x = (1, 1, 1)^\top$). Dennoch wird der optimale Zielfunktionswert von keinem zulässigen Punkt angenommen.

Ursache: Die duale Aufgabe lautet

$$\max_{y_1, y_2, y_3} \left\{ -y_1 : y_1 + y_3 = 1, y_1 - y_3 = 0, (y_1, y_2, y_3)^\top \in L^3 \right\}.$$

Diese Aufgabe besitzt nur einen einzigen zulässigen Punkt $(0.5, 0, 0.5)$, der aber nicht im Inneren des Kegels liegt. Somit ist die duale Aufgabe nicht stark zulässig.

Also kann ein konisches Optimierungsproblem stark zulässig und beschränkt sein und gleichzeitig unlösbar. Derartige Pathologien gibt es in der linearen Optimierung nicht.

2 Robustheit von konischen Optimierungsproblemen

2.1 Robuste Lösbarkeit

Analog zu robusten linearen Problemen heißt eine konische Optimierungsaufgabe (KP)

- **robust zulässig**, wenn alle hinreichend nahen Probleme zulässig sind.
- **robust unzulässig**, wenn alle hinreichend nahen Probleme unzulässig sind.
- **robust beschränkt**, wenn alle hinreichend nahen Probleme beschränkt sind.
- **robust unbeschränkt**, wenn alle hinreichend nahen Probleme unbeschränkt sind.
- **lösbar**, wenn alle hinreichend nahen Probleme lösbar sind.

Dabei ist ein Problem, das nicht robust zulässig ist, nicht unbedingt robust unzulässig.

Im folgenden nehmen wir stets an, dass K ein spitzer Kegel mit nichtleerem Inneren ist.

Theorem 2.1 (robuste Zulässigkeit). *(KP) ist robust zulässig genau dann, wenn (KP) stark zulässig ist. Dann ist auch (DKP) robust nach oben beschränkt.*

Beweis. Sei $\delta >_K 0$. Ist (KP) robust zulässig, so ist die Aufgabe

$$\min\{c^\top x : Ax - b - t\delta \geq_K 0\}$$

zulässig für alle hinreichend kleinen $t > 0$. Eine zulässige Lösung eines perturbierten Problems ist dann stark zulässig für (KP). Die Umkehrung ist offensichtlich.

Sind alle hinreichend nahen Probleme zulässig, so sind die zugehörigen dualen Probleme wegen der schwachen Dualität nach oben beschränkt. \square

Theorem 2.2 (Lösbarkeit von Ungleichungssystemen). *Gegeben sei eine Ungleichung*

$$Ax - b \geq_K 0. \quad (I)$$

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

1. Die Ungleichung (I) besitzt keine Lösung, wenn ein λ existiert mit

$$\lambda \geq_{K^*} 0, \quad A^\top \lambda = 0, \quad \lambda^\top b > 0. \quad (II)$$

2. Wenn die Ungleichung (II) nicht lösbar ist, so ist die Ungleichung (I) fast lösbar. D.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein b' mit $\|b - b'\| < \epsilon$, so dass die perturbierete Ungleichung $Ax - b' \geq_K 0$ lösbar ist.

3. Die Ungleichung (II) ist lösbar genau dann, wenn (I) nicht fast lösbar ist.

Beweis. Übungsaufgabe! □

Mit Theorem 2.2 können wir die folgende Aussage zur robusten Unzulässigkeit beweisen.

Theorem 2.3 (Robuste Unzulässigkeit). *Die Aufgabe (KP) ist robust unzulässig genau dann, wenn das System*

$$(i) \quad b^\top y = 1, \quad y^\top A = 0, \quad y \geq_{K^*} 0$$

robust zulässig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn das System

$$(ii) \quad b^\top y = 1, \quad y^\top A = 0, \quad y >_{K^*} 0$$

lösbar ist.

Beweis. Angenommen, (ii) ist lösbar. Wir beweisen: Alle Probleme, die genügend nahe bei (KP) liegen, haben keine zulässige Lösung.

Sei λ^* eine Lösung von (ii). O.B.d.A. habe A vollen Spaltenrang. Für genügend kleine Perturbationen der Matrix A zu einer Matrix A' hat auch A' vollen Spaltenrang. Dann ist $\lambda^\top A' = 0$ lösbar. Zusätzlich kann man für das perturbierete Problem die Lösung $\lambda(A')$ so wählen, dass $\lambda(A) = \lambda^* >_{K^*} 0$ gilt und $\lambda(A')$ stetig ist bzgl. A' . Somit ist auch $\lambda(A') >_{K^*} 0$ für alle A' , die hinreichend nahe bei A sind. Wir wählen also eine Umgebung U von A so, dass $\lambda(A') >_{K^*} 0$ für alle $A' \in U$ gilt.

Aufgrund der Voraussetzung gilt $b^\top \lambda^* = 1$. Wegen der Stetigkeit gibt es somit eine Umgebung V von b und eine Umgebung $U' \subseteq U$ von A mit

$$b'^\top \lambda(A') > 0 \quad \text{für alle } b' \in V, A' \in U',$$

d.h. für alle $b' \in V$ und $A' \in U'$ ist das System (II) aus Theorem 2.2 lösbar. Somit sind aber alle Probleme

$$\min\{c'^\top x : A'x - b' \geq_K 0\}$$

mit $b' \in V$, $A' \in U'$, unzulässig. Dies entspricht der robusten Unzulässigkeit von (KP).

Umgekehrt nehmen wir an, dass (KP) robust unzulässig ist. Dann gibt es Umgebungen U von A und V von b , so dass alle Ungleichungssysteme $A'x - b' \geq_K 0$ mit $A' \in U$, $b' \in V$, unzulässig sind. Diese Ungleichungssysteme sind offenbar nicht fast lösbar. Somit existiert für alle $A' \in U$, $b' \in V$, ein $\lambda(A', b')$ mit

$$b'^\top \lambda(A', b') > 0, \quad \lambda(A', b')^\top A = 0, \quad \lambda(A', b') \geq_{K_*} 0$$

(siehe Theorem 2.2). Somit ist also (i) robust zulässig, da man durch Normieren der $\lambda(A', b')$ stets ein Lösung erhält.

Es sei nun $\lambda_0 >_{K_*} 0$. Für hinreichend kleine positive ϵ gilt dann $A_\epsilon := A + \epsilon b \lambda_0^\top A \in U$. Sei zusätzlich ϵ so gewählt, dass $\epsilon \lambda_0^\top b > -1$ gilt. Durch Ersetzen von $A' = A_\epsilon$, $b' = b$, $\lambda = \lambda(A', b')$ und $\lambda^* = \lambda + \epsilon(\lambda^\top b)\lambda_0$ erhalten wir dann

$$\lambda^* = \underbrace{\lambda}_{\geq_{K_*} 0} + \underbrace{\epsilon(\lambda^\top b)}_{> 0} \underbrace{\lambda_0}_{>_{K_*} 0} >_{K_*} 0,$$

$$\lambda^{*\top} A = (\lambda^\top + \epsilon(\lambda^\top b)\lambda_0^\top)A = \lambda^\top (A + \epsilon b \lambda_0^\top A) = \lambda^\top A' = 0,$$

$$b^\top \lambda^* = b^\top \lambda + \underbrace{\epsilon b^\top \lambda_0}_{> -1} \underbrace{(\lambda^\top b)}_{> 0} > b^\top \lambda - b^\top \lambda = 0.$$

Somit ist auch das Ungleichungssystem (ii) lösbar. □

Theorem 2.4 (Robuste Lösbarkeit). *Für ein konisches Optimierungsproblem (KP) sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. (KP) ist robust zulässig und robust nach unten beschränkt.
2. (KP) ist robust lösbar.
3. (DKP) ist robust lösbar.
4. (DKP) ist robust zulässig und robust nach oben beschränkt.
5. (KP) und (DKP) sind beide stark zulässig.

Insbesondere gilt, dass unter jeder der obigen äquivalenten Bedingungen (KP) und (DKP) lösbar sind und den gleichen optimalen Zielfunktionswert besitzen.

Beweis. (1. \rightarrow 5.): Wenn (KP) robust zulässig ist, so ist es auch stark zulässig (Theorem 2.1). Wenn zusätzlich (KP) robust nach unten beschränkt ist, so ist (nach dem starken Dualitätssatz) die Aufgabe (DKP) robust lösbar. Insbesondere ist also (DKP) robust zulässig und somit auch stark zulässig.

(5. → 2.) : Da (KP) und (DKP) stark zulässig sind, sind sie auch stark zulässig bei nicht zu großen Perturbationen im Input. Wegen dem starken Dualitätssatz ist also (KP) robust lösbar.

(2. → 1.) : Aus der robusten Lösbarkeit folgt natürlich auch die robuste Zulässigkeit und die robuste Beschränktheit.

Wir haben also die Äquivalenz der Aussagen 1., 2. und 5. gezeigt. Aufgrund der Symmetrie von dualem und primalen Problem sind somit auch die Aussagen 3., 4. und 5. äquivalent. \square

2.2 Anwendung der konischen Optimierung: Robuste lineare Optimierung

Es sei ein robustes lineares Optimierungsproblem

$$(LP_U) \quad \min_x \{c^\top x \mid a_i^\top x - b_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}, (A, b, c) \in U$$

mit einer Unsicherheitsmenge U gegeben.

In vielen Fällen kann man davon ausgehen, dass die Unsicherheitsmengen jeder der m Ungleichungen durch Ellipsoide gegeben sind, die unabhängig voneinander gewählt sind:

$$U = \{(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m, c) : \exists u_i \text{ mit } u_i^\top u_i \leq 1, \quad i = 0, \dots, m, \\ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^* \\ b_i^* \end{pmatrix} + P_i u_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ c = c^* + P_0 u_0 \quad \}$$

Dabei sind die a_i^* und b_i^* die Nominalwerte. Die $P_i u_i$ mit den Matrizen P_i repräsentieren die Perturbation der Daten. Die Bedingungen $u_i^\top u_i \leq 1$ beschränken die Perturbationen auf Ellipsoide.

Wir zeigen nun, dass dieses robuste lineare Problem einem konischen, quadratischen Optimierungsproblem entspricht.

Ein Vektor x ist robust zulässig genau dann, wenn für alle $i = 1, \dots, m$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min_{u_i: \|u_i\| \leq 1} \left\{ a_i^\top [u_i] x - b_i [u_i] : \begin{pmatrix} a_i [u_i] \\ b_i [u_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^* \\ b_i^* \end{pmatrix} + P_i u_i \right\} \\ &= a_i^{*\top} x - b_i^* + \min_{u_i: \|u_i\| \leq 1} \left\{ u_i^\top P_i^\top \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= a_i^{*\top} x - b_i^* - \|P_i^\top \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}\|_2. \end{aligned}$$

Also ist x robust zulässig für das lineare Programm genau dann, wenn x die Ungleichungen

$$\|P_i^\top \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}\|_2 \leq a_i^{*\top} x - b_i^*, \quad i = 1, \dots, m$$

erfüllt. Analog hierzu kann die Kostenbedingung $c^\top x \leq t$ mit $c = c^* + P_0 u_0$ durch die Ungleichung

$$c^{*\top} x + \|P_0^\top x\|_2 \leq t$$

ausgedrückt werden. (LP_U) lässt sich also schreiben als

$$(RLP) \quad \min_{x,t} \{t : \|P_0^\top x\|_2 \leq -c^{*\top} x + t, \\ \|P_i^\top \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}\|_2 \leq a_i^{*\top} x - b_i^*, \quad i = 1, \dots, m \}.$$

Wir können also bei gegebener ellipsoidaler Unsicherheitsmenge ein robustes lineares Programm lösen, indem wir das zugeordnete konische Optimierungsprogramm (RLP) lösen.

Zum Optimieren über dem second order cone (Lorentzkegel) gibt es gute Software, z.B. SeDuMi (open source) oder Mosek (kommerziell).

2.3 Anwendungsbeispiel: Robuste Synthese von Phased-Array Antennen

Es wird eine monochromatisch aussendende Antenne mit Ursprung in $(0, 0, 0)$ betrachtet.

Die Energieverteilung einer Antenne ist durch ihr Antennendiagramm $D(\delta)$ gegeben, wobei δ eine 3-dimensionale Richtung ist. Dies ist i.a. eine komplexe Funktion $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$. Die in Richtung δ abgestrahlte Energie ist $|D(\delta)|^2$.

Wir betrachten eine aus k kleinen Antennenelementen $D_1(\delta), \dots, D_k(\delta)$ bestehende Antenne. Ihr Gesamtdiagramm $D(\delta)$ bestimmt sich durch die D_i und komplexe Werte x_i , mit welchen die Leistung und die Phasen der einzelnen Antennenelemente geregelt werden. Dabei gilt

$$D(\delta) = \sum_{i=1}^k x_i D_i(\delta).$$

Wir suchen nun Werte für die x_i , so dass $D(\delta)$ möglichst gut einem gewünschten Diagramm $D^*(\delta)$ entspricht.

Die Antennenelemente seien ringförmig, die x-y-Ebene sei die Erdoberfläche und $k = 10$. Das Diagramm eines Rings ($a \leq r \leq b$) hängt ab vom Winkel θ zwischen

der Ebene und dem Vektor δ . r ist hier der Abstand von einem Punkt zum Ursprung. Das Diagramm eines Ringelements ist also gegeben durch θ und (a, b) . Es lässt sich ausrechnen, dass

$$D_{a,b}(\theta) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} r \cos \left(2\pi r \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \right) d\phi \right) dr.$$

Dies ist eine reelle Funktion. λ bezeichnet hier die Wellenlänge.

Wir möchten nun ein Diagramm erzeugen, das symmetrisch zur z-Achse und im Kegel $\pi/2 \geq \theta \geq \pi/2 - \pi/12$ konzentriert ist. Somit besitzt das Zieldiagramm $D^*(\theta)$ die folgenden Eigenschaften:

- $D^*(\theta) = 0$ für $\theta \in [0; \pi/2 - \pi/12]$.
- $D^*(\theta)$ strebt für $\theta \rightarrow \pi/2$ gegen 1.

Wir messen die Ähnlichkeit eines zusammengesetzten Diagramms zu $D^*(\theta)$ durch den maximalen Abstand bei 120 festgelegten Winkeln (Gitterpunkten) im interessanten Intervall:

$$\tau = \max_{l=1, \dots, 120} \left| D^*(\theta_l) - \sum_{j=1}^{10} x_j D_{r_{j-1}, r_j}(\theta_l) \right|$$

Statt $D_{r_{j-1}, r_j}(\theta_l)$ schreiben wir im Folgenden $D_j(\theta_l)$. Weiter können wir o.B.d.A. $x_j \in \mathbb{R}$ annehmen für alle j , da D^* und die D_j reell sind. Somit ist die folgende Optimierungsaufgabe zu lösen.

$$\min_{\tau \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{10}} \left\{ \tau : -\tau \leq D^*(\theta_l) - \sum_{j=1}^{10} x_j D_j(\theta_l) \leq \tau, l = 1, \dots, 120 \right\} \quad (Nom)$$

Dieses Problem (Nom) ist ein einfaches lineares Optimierungsproblem mit einer Lösung x_j^* , $j = 1, \dots, 10$. Die Werte x_j^* beschreiben jedoch Charakteristiken von physikalischen Systemen. In der Realität können diese Werte also i.A. nicht exakt eingestellt werden. Wir nehmen an, dass die tatsächlichen Werte x^{real} um 0.1% von den nominalen abweichen können, d.h. für $j = 1, \dots, 10$ ist

$$x_j^{real} = p_j x_j^* \quad \text{mit} \quad 0.999 \leq p_j \leq 1.001.$$

Die p_j sind Zufallsvariablen mit Mittelwert 1. Wir nehmen an, dass sie nicht korreliert sind.

Man kann testen, wie stark sich kleine Änderungen in der Praxis auswirken, indem man das Problem für zufällige Werte p_j innerhalb der gegebenen Grenzen

berechnet. Es zeigt sich, dass dann die Abweichungen zum nominalen Optimum sehr groß sind. Es ist also sinnvoll, einen robusten Ansatz zu wählen.

Die Unsicherheitsmenge U ist eine Box (vgl. Modellierung nach Soyster). Da aber die p_j Zufallsvariablen sind, ist es sehr unwahrscheinlich, dass alle gleichzeitig den schlimmsten Fall $\pm 0.1\%$ annehmen.

Die reale Abweichung ist $\delta_l(x) = D^*(\theta_l) - \sum_{j=1}^{10} p_j x_j D_j(\theta_l)$. Wir betrachten nun eine der Ungleichungen

$$-\tau \leq \delta_l(x) = D^*(\theta_l) - \sum_{j=1}^{10} p_j x_j D_j(\theta_l) \leq \tau \quad (*)$$

mit zufälligem p_j . Für festes x ist dann $\delta_l(x)$ eine Zufallsvariable mit Mittelwert $\delta_l^*(x) = D^*(\theta_l) - \sum_{j=1}^{10} x_j D_j(\theta_l)$ und Standardabweichung

$$\begin{aligned} \sigma_l(x) &= \sqrt{E(\delta_l(x) - \delta_l^*(x))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{10} x_j^2 D_j^2(\theta_l) E(p_j - 1)^2} \\ &\leq \kappa u_l(x) \end{aligned}$$

mit $\kappa = 0.001$ und $u_l(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{10} x_j^2 D_j^2(\theta_l)}$. Wir verwenden nun den folgenden Ingenieursansatz: „Eine Zufallsvariable fluktuiert i.A. nicht mehr als das w -fache ihrer Standardabweichung.“ Häufig wird $w = 3$ gewählt.

Wir betrachten also nur alle Situationen mit $|\delta_l(x) - \delta_l^*(x)| \leq w\kappa u_l(x)$. Somit ist die deterministische Version der Ungleichung (*)

$$-\tau \leq \delta_l^*(x) - w\kappa u_l(x), \quad \delta_l^*(x) + w\kappa u_l(x) \leq \tau.$$

Das robuste Optimierungsproblem ist somit

$$\begin{aligned} &\min \tau \\ (Rob) \quad &\|Q_l x\|_2 \leq D^*(\theta_l) - \sum_{j=1}^{10} x_j D_j(\theta_l) + \tau, \quad l = 1, \dots, 120 \\ &\|Q_l x\|_2 \leq -D^*(\theta_l) + \sum_{j=1}^{10} x_j D_j(\theta_l) + \tau, \quad l = 1, \dots, 120 \end{aligned}$$

mit $Q_l = w\kappa \text{Diag}(D_1(\theta_l), \dots, D_{10}(\theta_l))$. Dies ist ein konisches Optimierungsproblem, welches die Form (RLP) besitzt. D.h. dieses Optimierungsproblem erhält man aus (Nom), wenn man ellipsoidale Unsicherheiten bei den $D_j(\theta_l)$ verwendet:

$$D_j(\theta_l) = D_j^{nom}(\theta_l) + D_j^{nom}(\theta_l) w\kappa u_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{10} u_j = 1.$$

Man erhält bei Rechnungen, dass das robuste Diagramm viel näher am Zieldiagramm liegt, als das nominale Diagramm. Außerdem ist es robust gegenüber einer Abweichung der Daten.

Warum ist die nominale Lösung so instabil und warum ist die robuste Lösung so viel besser?

Die Unsicherheiten steigen in der Praxis mit der Größe der $|x_j^*|$. Da diese aber im gegebenen Beispiel recht groß sind, ist die nominale Lösung instabil. Durch die Beschränkung $\|Qx\|_2 \leq \dots$ in der Aufgabe (Rob) werden die x_j beschränkt. Somit sind die Lösungen von (Rob) weniger instabil.

Dies ist typisch für viele Anwendungen: Die nominale Lösung ist „in der Nähe des Randes“ der nominal zulässigen Menge. Es existieren auch fast optimale Lösungen tief im Inneren der zulässigen Lösungsmenge, die im robusten Ansatz gefunden werden. Perturbationen haben dann keinen großen Effekt.

Bei der Lösung von (Nom) wird kein Wert darauf gelegt, Lösungen tief im Inneren des zulässigen Bereichs zu finden. Es kann also sein, dass das nominale Optimum unzulässig wird bei der Perturbation von Daten. Bei der Aufgabe (Rob) jedoch wird eine fast optimale Lösung gefunden, d.h. der Preis der Robustheit ist nicht sehr hoch.

3 Robuste Modellierung allgemeiner Unsicherheitsmengen

Strategie: Wandle jede einzelne gegebene Ungleichung um in eine (oder mehrere) äquivalente explizite robuste Ungleichung(en). Was bedeutet hierbei „äquivalent“?

3.1 Repräsentierung von Ungleichungssystemen

Beispiel 3.1. *Das Ungleichungssystem*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 & (*) \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

ist eine äquivalente Repräsentation von $|x_1| + |x_2| \leq 1$. Aber auch das Ungleichungssystem

$$-v_1 \leq x_1 \leq v_1, \quad -v_2 \leq x_2 \leq v_2, \quad v_1 + v_2 \leq 1 \quad (**)$$

repräsentiert diese Menge, obwohl die Anzahl der Variablen und somit auch die Zulässigkeitsbereiche verschieden sind.

Definition 3.1. Eine Menge $X^+ \subseteq \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_v^k$ repräsentiert eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}_x^n$, wenn gilt:

$$X = \{x : \exists v \text{ mit } (x, v) \in X^+\}.$$

Ein Ungleichungssystem S^+ repräsentiert ein System S , wenn die zulässigen Lösungen in S^+ die in S repräsentieren (d.h. wenn ein Punkt in S genau dann zulässig ist, wenn eine Erweiterung v existiert, so dass (x, v) zulässig in S^+ ist).

Mit dieser Definition ist klar, dass $(**)$ tatsächlich $(*)$ repräsentiert. Allgemeiner wird die Ungleichung $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$ durch das Ungleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq 1, \quad -y_j \leq x_j \leq y_j, \quad j = 1, \dots, n$$

repräsentiert. Mit der Darstellung $(*)$ hätten wir zwar weniger Variablen, aber 2^n Ungleichungen benötigt. Schon an diesem kleinen Beispiel sieht man, dass es unterschiedliche Repräsentierungen gibt, die sogar zwischen polynomieller und exponentieller Größe variieren können.

Wir nehmen nun an, eine Ungleichung $a^\top x \geq b$ variiert in einer Unsicherheitsmenge U , d.h. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$. Es sei

$$(RU) \quad a^\top x \geq b \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U.$$

(RU) ist ein System von unendlich vielen Ungleichungen und damit in dieser Repräsentierung nicht praktisch behandelbar. Wir haben jedoch schon andere, praktisch behandelbare Realisierungen gesehen:

- U variiert in einer Box \implies LP-Modellierung nach Soyster (Kapitel 0.2)
- U variiert in einem Ellipsoid \implies Modellierung als konisches Optimierungsproblem (Kapitel 2.2)

Bemerkungen:

1. Wenn die Unsicherheitsmenge U repräsentiert werden kann als Bild einer anderen Menge U' unter einer affinen Abbildung $\zeta \rightarrow \xi = p + P\zeta$, so können wir von der Perturbation ξ zu ζ übergehen. Somit gilt Folgendes:

2. Falls U eine einfache Struktur hat (Parallelotop, Ellipsoid etc.), können wir zur standardisierten Unsicherheitsmenge übergehen. Denn: Ein Parallelotop ist ein Einheitswürfel unter einer affinen Abbildung. Ein Ellipsoid ist das affine Bild einer Einheitskugel.
3. O.B.d.A. sei die Kostenfunktion ohne Unsicherheiten.
4. Die Bildung des zugeordneten robusten Optimierungsproblems geschieht unabhängig voneinander für jede der Nebenbedingungen $a_i^\top x \geq b_i$. Jede wird ersetzt durch ihr robustes Gegenstück.

Diesselbe Konstruktion kann auf eine Unsicherheitsmenge angewandt werden, die das Kreuzprodukt von Unsicherheitsmengen U_i ist, d.h. $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$.

5. Wenn x robust zulässig ist für ein robustes LP, dann bleibt x robust zulässig, wenn wir von U_i zur konvexen Hülle $\text{conv}U_i$ übergehen. Dies gilt ebenfalls für die Abschließung von U_i . (Beweis: Übungsaufgabe)

Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass die Unsicherheitsmengen U_i konvex und abgeschlossen sind.

Wir betrachten nun Unsicherheitsmengen von der Form

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^n \begin{pmatrix} \alpha_l \\ \beta_l \end{pmatrix} u_l : (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{Z} \right\}. \quad (3.1)$$

Wenn z.B. \mathcal{Z} ein Ellipsoid ist, dann entspricht dies unseren Betrachtungen aus Kapitel 2.2. Wir betrachten nun Mengen \mathcal{Z} , welche durch einen Kegel K wie folgt gegeben sind:

$$\mathcal{Z} = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \exists v \in \mathbb{R}^k \text{ mit } S\xi + Qv + p \in K \} \quad (3.2)$$

Dabei sei der Kegel K konvex, spitz, abgeschlossen und mit nichtleerem Inneren. Falls K kein polyedrischer Kegel ist (d.h. K ist nicht der Schnitt endlich vieler Halbebenen), so verlangen wir zusätzlich, dass es ein Element aus \mathcal{Z} im Inneren von \mathcal{K} gibt, d.h. $\exists(\bar{\xi}, \bar{v})$ mit $S\bar{\xi} + Q\bar{v} + p \in \text{int}K$.

Dann gilt folgendes Theorem:

Theorem 3.1 (Repräsentierung von (RU)). *Sei \mathcal{Z} durch (3.2) gegeben und sei K polyedrisch oder stark zulässig. Dann kann (RU) repräsentiert werden durch das folgende endliche System von konischen Ungleichungen in Variablen $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$:*

$$\begin{aligned} p^\top y &\leq a^{*\top} x - b^* \\ y^\top Q &= 0 \\ (y^\top S)_l &= \alpha_l^\top x - \beta_l, \quad l = 1, \dots, n \\ y &\in K_* \end{aligned}$$

Beweis. x ist zulässig für (RU) genau dann, wenn die folgenden äquivalenten Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \inf_{\xi \in \mathcal{Z}} \left\{ \underbrace{a^{*\top} x - b^*}_{d[x]} + \sum_{l=1}^n \xi_l \underbrace{(\alpha_l^\top x - \beta_l)}_{c_l[x]} \right\} &\geq 0 \\ \inf_{\xi \in \mathcal{Z}} \{c^\top[x]\xi + d[x]\} &\geq 0 \\ \inf_{\xi \in \mathcal{Z}} \{c^\top[x]\xi\} &\geq -d[x] \\ \inf_{\xi \in \mathcal{Z}, v} \{c^\top[x]\xi : S\xi + Qv + p \in K\} &\geq -d[x] \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung sagt aus, dass x genau dann zulässig ist für (RU) , wenn der Wert des konischen Problems

$$(KP) \quad \inf_{\xi \in \mathcal{Z}, v} \{c^\top[x]\xi : S\xi + Qv + p \in K\} \geq -d[x]$$

ist. Sei ein Element von \mathcal{Z} im Inneren von K . Dann ist (KP) stark zulässig. Wir wenden dann den starken Dualitätssatz der konischen Optimierung an. Demnach ist x genau dann zulässig, wenn für das konisch duale Problem

$$(DKP) \quad \max_y \{-p^\top y \mid Q^\top y = 0, S^\top y = c[x], y \in K^*\} \geq -d[x]$$

gilt. Da K stark zulässig ist und (KP) beschränkt, ist diese duale Aufgabe lösbar, d.h. das Maximum wird angenommen.

Wenn der Kegel K polyedrisch ist, so ist (KP) ein lineares Optimierungsproblem und der Dualitätssatz der linearen Optimierung ergibt dieselbe Folgerung.

Also: x ist zulässig für (RU) genau dann, wenn (DKP) eine zulässige Lösung y hat mit $p^\top y \leq d[x]$. \square

Da der nichtnegative Orthant, der Lorenzkegel und der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen selbst dual sind, erhalten wir als Korollar:

Folgerung 3.2. *Sei die Unsicherheitsmenge in (RU) durch eine Menge \mathcal{Z} in der Form (3.2) gegeben. Dabei sei*

1. K polyedrisch, d.h. $K = \mathcal{R}_+^n$
2. $K := K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ mit Lorenzkegeln K_i
3. K der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen.

In den Fällen 2. und 3. existiere ein Punkt aus \mathcal{Z} im Inneren von K . Dann ist die robuste Modellierung von (RU) möglich über:

- in 1. lineare Ungleichungen
- in 2. konische quadratische Ungleichungen
- in 3. lineare Matrixungleichungen

Die Größe der Repräsentierung ist polynomiell beschränkt in der Zahl der Variablen in (RU) und der Größe der Beschreibung von \mathcal{Z} .

3.2 Beispielaufgaben

Beispiel 3.2. Sei die nominale Ungleichung $-7x_1 + 5x_2 \geq 2$ gegeben. Die Unsicherheitsmenge U sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} u_2 : u \in \mathcal{Z} \right\}$$

mit

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \geq 1, 2u_2 + u_1 \geq 3 \right\}.$$

Die Menge \mathcal{Z} erhält keinen Nullvektor und ist somit kein Kegel. Sie kann jedoch repräsentiert werden durch

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in K \right\}$$

mit dem Kegel

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : \lambda_1 \geq 0, \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0 \right\}.$$

Wir wollen nun Theorem 3.1 anwenden. In die Formeln von wird also folgendes eingesetzt:

$$a^* = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b^* = 2, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = 5, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = -1$$

$$p = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Ungleichung $p^\top y \leq a^{*\top} x - b^*$ entspricht somit $-y_1 - y_2 \leq -7x_1 + 5x_2 - 2$. Die Ungleichung $y^\top Q = 0$ ist redundant. Da S eine Einheitsmatrix ist, gilt $(y^\top S)_l = y_l$, d.h. $y_1 = x_1 - 5$ und $y_2 = -2x_2 + 1$. Die Bedingung $y \in K_*$ entspricht $y_1 \geq 0$,

$y_2 \geq 0$ und $2y_1 - y_2 \geq 0$. Also erhalten wir das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} -y_1 - y_2 &\leq -7x_1 + 5x_2 - 2 \\ y_1 &= x_1 - 5 \\ y_2 &= -2x_2 + 1 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Mit den beiden Gleichungen können wir nun die y -Variablen ersetzen. Wir erhalten nach einigen Umformungsschritten:

$$2x_1 + 2 \leq x_2, \quad x_2 \leq 1/2, \quad x_1 + x_2 \geq 5.5.$$

Diese Bedingungen sind widersprüchlich, d.h. es existiert keine robust zulässige Lösung für die gegebene Ungleichung und die angegebene Unsicherheitsmenge.

Häufig ist der Kegel K in der Repräsentierung von \mathcal{Z} das Kreuzprodukt einfacher Kegel $K = K_1 \times \dots \times K_t$, d.h.

$$\mathcal{Z} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \exists v_1, \dots, v_t \text{ mit } S_i \xi + Q_i v_i + p_i \in K_i, \quad i = 1, \dots, t\}.$$

Folgerung 3.3. Ist der Kegel K in der Repräsentierung von \mathcal{Z} das Kreuzprodukt von Kegeln K_1, \dots, K_t , so ist die robuste Modellierung von Theorem 3.1 in Variablen x, y_1, \dots, y_t wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t p_i^\top y_i &\leq a^{*\top} x - b^* \\ \sum_{i=1}^t y_i^\top Q_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^t (y_i^\top S_i)_l &= \alpha_l^\top x - \beta_l, \quad l = 1, \dots, n \\ y_i &\in (K_i)_*, \quad i = 1, \dots, t. \end{aligned}$$

Beweis. Übungsaufgabe! □

Beispiel 3.3. \mathcal{Z} sei der Schnitt von einem Würfel mit einem Ellipsoid, d.h.

$$\mathcal{Z} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : -1 \leq \xi_l \leq 1 \quad \forall l = 1, \dots, n, \quad \sqrt{\sum_{l=1}^n (\xi_l / \sigma_l)^2} \leq r \right\}.$$

Dabei sind $r > 0$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ als Parameter gegeben.

In der Repräsentierung $\mathcal{Z} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : S_1\xi + p_1 \in K_1, S_2\xi + p_2 \in K_2\}$ kann folgendes gewählt werden:

$$S_1 = \begin{pmatrix} E_n \\ \mathbf{0}_n^\top \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} : t \geq \|z\|_\infty \right\},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \text{diag}(1/\sigma_i)_{i=1}^n \\ \mathbf{0}_n^\top \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ r \end{pmatrix}, \quad K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} : t \geq \|z\|_2 \right\}.$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{0}_n$ einen Nullvektor mit n Einträgen, E_n die n -dimensionale Einheitsmatrix und $\text{diag}(1/\sigma_i)_{i=1}^n$ eine $n \times n$ -Diagonalmatrix mit den Einträgen $1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_n$.

Der Kegel K_2 ist ein Lorentzkegel und somit selbstdual. Für den dualen Kegel von K_1 gilt

$$(K_1)_* = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} : t \geq \|z\|_1 \equiv \sum_{l=1}^n |z_l| \right\}$$

(siehe Aufgabe 1 des 3. Übungsblattes). Das Ungleichungssystem

$$a^\top x \geq b \quad \forall [a; b] = [a^*; b^*] + \sum_{l=1}^n \xi_l [\alpha_l; \beta_l] \quad \text{mit } \xi \in \mathcal{Z}$$

kann somit wie folgt modelliert werden:

- (i) $\tau_1 + r\tau_2 \leq a^{*\top} x - b^*$
- (ii) $(\eta_1 + \text{diag}(1/\sigma_i)_{i=1}^n \eta_2)_l = \alpha_l^\top x - \beta_l, \quad l = 1, \dots, n$
- (iii) $\|\eta_1\|_1 \leq \tau_1 \quad \text{wegen } \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} \in (K_1)_*$
- (iv) $\|\eta_2\|_2 \leq \tau_2 \quad \text{wegen } \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \in K_2.$

Mit den Ungleichungen (iii) und (iv) können wir nun o.B.d.A. die Variablen τ_1 und τ_2 eliminieren. Wir erhalten somit das folgende Ungleichungssystem:

$$\|\eta_1\|_1 + r\|\eta_2\|_2 \leq a^{*\top} x - b^*$$

$$(\eta_1 + \text{diag}(1/\sigma_i)_{i=1}^n \eta_2)_l = \alpha_l^\top x - \beta_l, \quad l = 1, \dots, n.$$

3.3 Robuste Modellierung von Zufallsungleichungen

Bisher waren die Unsicherheitsmengen „unbekannt, aber beschränkt“. Wir haben Aussagen der folgenden Form betrachtet: „Falls man annehmen kann, dass

alle Parameter nicht mehr als 15% schwanken, werden wir auf jeden Fall überleben.“ Es gab keine Aussagen darüber, was bei 15.1% passiert. Um „auf der sicheren Seite“ zu sein, können wir die Unsicherheitsmenge U vergrößern.

In einigen Anwendungen soll jedoch ein stochastisches Modell robust modelliert werden. Wir betrachten also die folgende Zufallsungleichung

$$(RZU) \quad a^\top x \leq b \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^L u_l \begin{pmatrix} \alpha_l \\ \beta_l \end{pmatrix}.$$

u sei eine Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathcal{P} und einem Erwartungswert E .

Wir suchen eine Modellierung in der Form

$$(PRU) \quad p(x) \equiv \text{Prob} \left\{ u \mid a^{*\top} x + \sum_{l=1}^L u_l \alpha_l^\top x > b^* + \sum_{l=1}^L u_l \beta_l \right\} \leq \epsilon$$

mit kleinem $\epsilon \in (0; 1)$, d.h. die Ungleichung $a^\top x \leq b$ soll mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \epsilon$ erfüllt sein.

I.A. ist es schwierig diese Wahrscheinlichkeiten auszurechnen. Darum wird jede Zufallsungleichung durch ihre rechnerisch behandelbare sichere Approximation ersetzt.

Definition 3.2 (sichere Approximation). *Es sei die Zufallsungleichung (PRU) gegeben mit $\epsilon \in (0; 1)$ und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathcal{P} . Sei \mathcal{S} ein Ungleichungssystem mit Variablen x und evtl. zusätzlichen Variablen v . \mathcal{S} ist eine sichere Approximation von (PRU), wenn die x -Komponenten jeder zulässigen Lösung $\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ von \mathcal{S} zulässig sind für (PRU). Ist \mathcal{S} effizient berechenbar, so heißt \mathcal{S} rechnerisch behandelbar.*

Sei o.B.d.A. der Erwartungswert $E(u) = 0$ (sonst Skalierung) und seien die u_l , $l = 1, \dots, L$ unabhängige Variablen mit $|u_l| \leq 1$. Wir untersuchen nun die Ungleichung

$$\eta \equiv \sum_{l=1}^L u_l (\alpha_l^\top x - \beta_l) \leq b^* - a^{*\top} x. \quad (3.3)$$

η ist in der Ungleichung (3.3) für festes x eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und der Standardabweichung

$$\sigma(\eta) = \sqrt{\sum_{l=1}^L (\alpha_l^\top x - \beta_l)^2 E(u_l^2)} \leq \sqrt{\sum_{l=1}^L (\alpha_l^\top x - \beta_l)^2} \quad (3.4)$$

wegen $|u_l| \leq 1$. Ungleichung (PRU) bedeutet somit, dass die Ungleichung (3.3) mit Wahrscheinlichkeit $1 - \epsilon$ erfüllt sein soll.

Wie schon beim Antennenproblem verwenden wir den folgenden Ingenieursansatz:

„Eine zufällige Variable ist 'niemals' größer als ihr Mittelwert plus Ω mal die Standardabweichung.“ Dabei ist $\Omega = 3$ ein Sicherheitsparameter.

Wenn also η 'niemals' größer ist als $\Omega\sigma(\eta)$, so ist die 'sichere' Version von (3.3) die Ungleichung

$$(SPRU) \quad \Omega \sqrt{\sum_{l=1}^L (\alpha_l^\top x - \beta_l)^2} \leq b^* - a^{*\top} x.$$

Wenn Ω entsprechend gewählt wird, erfüllt jede zulässige Lösung von (SPRU) mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \epsilon$ die Ungleichung $a^\top x \leq b$.

Der Ingenieursansatz wird durch das folgende Lemma bestätigt und nochmal konkretisiert:

Lemma 3.4. *Seien $z_l, l = 1, \dots, L$ deterministische Koeffizienten und $u_l, l = 1, \dots, L$ unabhängige Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Werten in $[-1; 1]$. Dann ist*

$$\text{Prob} \left\{ u \mid \sum_{l=1}^L z_l u_l > \Omega \sqrt{\sum_{l=1}^L z_l^2} \right\} \leq \exp(-\Omega^2/2) \quad \forall \Omega \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Beispielsweise ist für} \quad \Omega = 5.26 &\longrightarrow \text{Prob}(\dots) < 10^{-6}, \\ \Omega = 7.44 &\longrightarrow \text{Prob}(\dots) < 10^{-12}. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma folgt nun

$$\text{Prob} \left(\eta > \Omega \sqrt{\sum_{l=1}^L (\alpha_l^\top x - \beta_l)^2} \right) \leq \exp(-\Omega^2/2) \quad \forall \Omega \geq 0.$$

Folgerung 3.5. *Ist $E(u) = 0$ und $u_l \in [-1; 1]$ für alle $l = 1, \dots, L$, so ist (SPRU) eine rechnerisch behandelbare sichere Approximation der Zufallsungleichung mit*

$$\text{Prob} \left(a^{*\top} x + \sum_{l=1}^L u_l \alpha_l^\top x > b^* + \sum_{l=1}^L u_l \beta_l \right) \leq \exp(-\Omega^2/2).$$

Insbesondere ist mit $\Omega \geq \sqrt{2 \ln 1/\epsilon}$ (SPRU) eine rechnerisch behandelbare sichere Approximation der Zufallsungleichung (PRU).

(*SPRU*) ist nichts anderes als das robuste Gegenstück einer linearen Ungleichung mit ellipsoidaler Unsicherheit. Bei der Antennenanwendung haben wir genau die rechnerisch behandelbare sichere Approximation benutzt.

Diskussion:

- Wenn man weiß, dass die Unsicherheiten nur in einem Ellipsoid variieren, ergibt die robuste Modellierung mit Ellipsoid eine 100%ig erfüllte Ungleichung.
- Wenn man den Ingenieursansatz über die Zufallsungleichung macht, ergibt sich eine analoge Ungleichung mit ellipsoidaler Unsicherheit. Diese modelliert, dass zufällige Variablen i.a. nicht allzu stark von ihrem Mittelwert abweichen.

Wenn die Ungleichung (*SPRU*) erfüllt ist, ist die ursprüngliche Zufallsungleichung $a^\top x \leq b$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \exp(-\Omega^2/2)$ erfüllt. Zum Beispiel für $\Omega = 7.44$ ist diese Wahrscheinlichkeit fast 1.

- In dieser Modellierung kann man die Sicherheit vergrößern durch Vergrößern von Ω . In einer stochastischen Modellierung ist das i.a. nicht so einfach möglich, da man nicht nur die Wahrscheinlichkeit eines Events erhöhen, sondern auch die Wahrscheinlichkeit für unliebsame Events verringern muss.
- Angenommen, für alle Zufallsvariablen u_i gilt $u_i \in [-1, 1]$. Wenn Ω groß ist, haben wir bei Wahl von $\mathcal{Z} = \text{Ball}_\Omega = \{\xi : \|\xi\|_2 \leq \Omega\}$ eine hohe Sicherheit gegenüber von Perturbationen. Diese Sicherheit ist bei Wahl von $\mathcal{Z} = \text{Box}_1 = \{\xi : |\xi_i| \leq 1 \forall i\}$ sogar 100%-ig. Bei unseren Optimierungsaufgaben wollen wir jedoch auch möglichst gute Zielfunktionswerte erhalten. Aus diesem Grund sollte \mathcal{Z} möglichst klein sein bei gleichzeitiger hoher Sicherheit. Dies kann erreicht werden durch die Wahl von $\mathcal{Z} = \text{Ball}_\Omega \cap \text{Box}_1$. Wir können also die gegebene Ungleichung analog zu Beispiel 3.3 modellieren und erhalten dennoch die gleiche Sicherheit wie bei $\mathcal{Z} = \text{Ball}_\Omega$ (Übungsaufgabe).

Anwendung: Single-Period Portfolio–Auswahl Problem

Gegeben seien 200 mögliche Wertpapiere (Assets). Anlage 200 bedeutet, das Geld festverzinslich mit 5.0% bei der Bank zu belassen. Die Gewinne r_l , $l = 1, \dots, 199$, der anderen Anlagen seien zufällige unabhängige Variablen, welche Werte im Intervall $[\mu_l - s_l; \mu_l + s_l]$ mit Erwartungswert μ_l annehmen. Es sei in unserem Beispiel

$$\mu_l = 1.05 + 0.3 \frac{200 - l}{199}, \quad s_l = 0.05 + 0.6 \frac{200 - l}{199}.$$

(Die Wertpapiere sind also so sortiert, dass die Werte von μ_l und σ_l fallen mit wachsendem l .)

Ziel: Verteile 1 Euro auf die Assets derart, dass das Value-at-Risk (VaR) des resultierenden Portfolios maximal wird, wobei das Risiko höchstens $\epsilon \leq 0.5\%$ betragen darf.

Es ist also das lineare Programm

$$\max_{y,t} \left\{ t \mid \sum_{l=1}^{199} r_l y_l + r_{200} y_{200} - t \geq 0, \sum_{l=1}^{200} y_l = 1, y_l \geq 0 \forall l = 1, \dots, 200 \right\}$$

zu lösen. Dabei gibt y_l das Kapital an, das in Asset l investiert wird. Die Gewinne r_l enthalten Unsicherheiten. Es gilt

$$r_l = \mu_l + s_l \xi_l \quad \text{für } l = 1, \dots, 199, \quad r_{200} = 1.05,$$

wobei die ξ_l unabhängige Zufallsvariablen sind mit Mittelwert 0 und Werten in $[-1; 1]$. Es sei $x = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$. Das lineare Programm können wir nun auch in der Form

$$\begin{aligned} & \max x_{201} \\ (a) \quad & \left(a^* + \sum_{l=1}^{199} \xi_l \alpha_l \right)^\top x - \left(b^* + \sum_{l=1}^{199} \xi_l \beta_l \right) \geq 0 \\ (b) \quad & \sum_{l=1}^{200} x_l = 1 \\ (c) \quad & x_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, 200 \end{aligned}$$

schreiben mit $a^* = (\mu_1, \dots, \mu_{199}, r_{200}, -1)^\top$, $\alpha_l = s_l e^l$ und $\beta_l = 0$ für alle $l = 1, \dots, 199$ (dabei ist $e^l \in \mathbb{R}^{201}$ der l -te Einheitsvektor) und $b^* = 0$. Nur die Ungleichung (a) enthält Unsicherheiten.

Die Ungleichung (a) entspricht also einer Ungleichung

$$a^\top x \geq b \quad \text{mit } [a; b] = [a^*; b^*] + \sum_{l=1}^{199} \xi_l [\alpha_l; \beta_l], \quad \xi \in \mathcal{Z}.$$

Wir wollen die robusten Lösungen für $\mathcal{Z} = \text{Box}_1$ und $\mathcal{Z} = \text{Box}_1 \cap \text{Ball}_\Omega$ mit $\Omega := \sqrt{2 \ln 1/\epsilon} = 3.255$ miteinander vergleichen.

Sei $\mathcal{Z} = \text{Box}_1 = \{\xi : \xi_l \in [-1; 1], l = 1, \dots, 199\}$, d.h. die stochastische Natur der Variablen wird ignoriert. Das Problem kann mit der Modellierung von Soyster gelöst werden. Man erhält dann eine lineare Optimierungsaufgabe, bei welcher die worst-case Gewinne $r_l^{\text{opt}} = \mu_l - s_l$ ausschlaggebend sind. Da diese Gewinne kleiner sind als die Festverzinsung bei der Bank, ist die optimale Strategie, das Geld bei der Bank zu belassen und 5% Profit zu erhalten.

Sei nun $\mathcal{Z} = \text{Box}_1 \cap \text{Ball}_\Omega$. Dann können wir die Ungleichung (a) ersetzen durch die Ungleichungen

$$\|z\|_1 + \Omega \|w\|_2 \leq a^{*\top} x - b^*, \quad z_l + w_l = \alpha_l^\top x - \beta_l \quad \forall l = 1, \dots, 199$$

(siehe Beispiel 3.3). Wir erhalten durch Einsetzen der ursprünglichen Variablen das folgende robuste Problem:

$$\max_{t,y,w,z} \left\{ t : t \leq \sum_{l=1}^{199} \mu_l y_l + 1.05 y_{200} - 3.255 \sqrt{\sum_{l=1}^{199} w_l^2} - \sum_{l=1}^{199} |z_l| \right. \\ \left. \begin{aligned} z_l + w_l &= s_l y_l \quad \forall l = 1, \dots, 199, \\ \sum_{l=1}^{200} y_l &= 1, \quad y_l \geq 0 \quad \forall l = 1, \dots, 200 \end{aligned} \right\}.$$

Z.B. mit SeDuMi erhalten wir nun eine robuste optimale Lösung mit einem Optimalwert $OPT = 1.1200$, d.h. wir haben 12% Profit bei modelliertem Risiko von 0.5%.

Also erhalten wir bei Einbeziehung der stochastischen Natur der Daten mehr als doppelt soviel Profit wie bei der Strategie mit $\mathcal{Z} = \text{Box}_1$.

3.4 Globalisierte robuste Modellierung linearer Optimierungsprobleme

Bei einigen Anwendungen ist die Verletzung von Nebenbedingungen zwar nicht erwünscht, kann aber bis zu einem gewissen Grad toleriert werden. Z.B. können evtl. „Notfallpläne“ in Kraft treten, indem weitere Ressourcen eingekauft werden. Solche Bedingungen nennen wir „weiche“ Ungleichungen.

Wir betrachten eine unsichere weiche Ungleichung

$$\left(a^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \alpha^l \right)^\top x \geq b^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \beta_l. \quad (3.5)$$

U_+ bezeichne die Menge aller möglichen Unsicherheiten und U die „normalen“ Unsicherheiten. Dabei ist $U \subseteq U_+$.

Wir fordern nun:

(F1) Für alle $\xi \in U$ soll die Ungleichung (3.5) weiterhin von einer Lösung x erfüllt werden.

(F2) Für $\xi \in U_+ \setminus U$ soll die Verletzung von (3.5) beschränkt sein durch ein konstantes Vielfaches der „Entfernung“ von ξ zu U .

Die Forderungen (F1) und (F2) lassen sich für (3.5) durch folgende Modellierung realisieren:

$$\left(b^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \beta_l \right) - \left(a^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \alpha^l \right)^\top x \leq s \cdot \text{dist}(\xi, U) \quad \forall \xi \in U.$$

$s \geq 0$ ist eine (evtl. gegebene) „globale Sensitivität“.

Annahmen:

1. Die normalen Unsicherheiten U sind nichtleer, abgeschlossen und konvex.
2. Die mögliche Unsicherheitsmenge U_+ ist die Summe von U und einem (abgeschlossenen) Kegel K :

$$U_+ = \{ \xi = \xi' + \xi'' : \xi' \in U, \xi'' \in K \}.$$

3. Die Entfernung eines Punktes $\xi \in U_+$ zu U ist definiert über eine beliebige aber festgelegte geeignete Norm $\| \cdot \|$ im \mathbb{R}^n

$$\text{dist}(\xi, U, K) = \inf_{\xi'} \{ \|\xi - \xi'\| : \xi' \in U, \xi - \xi' \in K \}.$$

Wir nennen ein Tupel $(U, K, \| \cdot \|)$ eine **Perturbationsstruktur**.

Definition 3.3. Seien $s \geq 0$ und die Perturbationsstruktur $(U, K, \| \cdot \|)$ gegeben. x ist global robust zulässig für (3.5) mit globaler Sensitivität s , wenn x die Ungleichung

$$\left(a^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \alpha^l \right)^\top x \geq b^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \beta_l - s \cdot \text{dist}(\xi, U, K) \quad (3.6)$$

erfüllt für alle $\xi \in U_+ = U + K$. (3.6) heißt die zur Perturbationsstruktur gehörende robuste Modellierung von (3.5).

Bemerkungen:

1. Für $K = \{0\}$ ist (3.6) die normale robuste Modellierung.
2. Für verschiedene Ungleichungen können auch verschiedene Sensitivitäten gewählt werden.

3. Die Sensitivitäten können als Variablen aufgefasst werden, die man evtl. durch weitere (lineare) Ungleichungen in der Größe beschränken kann. Man kann über die x -Variablen und die Sensitivitäten gleichzeitig optimieren. Hierbei ist dann i.A. die Zielfunktion zusammengesetzt aus der original Zielfunktion plus einer (gewichteten) Summe der Sensitivitäten.

Die rechnerische Behandelbarkeit klärt das folgende Theorem:

Theorem 3.6. *Ein Vektor x ist globalisiert robust zulässig (d.h. erfüllt (3.6)) genau dann, wenn x das folgende Paar von Ungleichungen erfüllt:*

$$(a) \quad \left(a^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \alpha^l \right)^\top x \geq b^* + \sum_{l=1}^L \xi_l \beta_l \quad \forall \xi \in U$$

$$(b) \quad \left(\sum_{l=1}^L u_l \alpha^l \right)^\top x \geq \sum_{l=1}^L u_l \beta_l - s \quad \forall u \in \tilde{U} := \{u \in K : \|u\| \leq 1\}.$$

Beweis. Übungsaufgabe □

Das Theorem besagt, dass die robuste Modellierung von einer globalisierten Ungleichung äquivalent ist zu einem Paar jeweils unendlich vieler Ungleichungen (semi-infinite Ungleichungen). Für diese können mit den Methoden aus Kapitel 3.1 effiziente Repräsentierungen gefunden werden.

Beispiel 3.4. 1. $U = \{\xi : |\xi_l| \leq r_l, l = 1, \dots, L\}$ sei ein Parallelotop, $K = \mathbb{R}^L$ und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_1$. Die Ungleichung (a) aus Theorem 3.6 entspricht dann

$$a^{*\top} x - \sum_{l=1}^L r_l |\alpha^l x - \beta_l| \geq b^*$$

und (b) entspricht

$$|\alpha^{l\top} x - \beta_l| \leq s, \quad l = 1, \dots, L.$$

2. Sei $U = \{\xi : \sum_{l=1}^L \xi_l^2 / \sigma_l^2 \leq r^2\}$ ein Ellipsoid, $K = \mathbb{R}_+^L$ und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$. Die Ungleichung (a) aus Theorem 3.6 entspricht dann

$$a^{*\top} x - r \sqrt{\sum_{l=1}^L \sigma_l^2 (\alpha^l x - \beta_l)^2} \geq b^*$$

und (b) entspricht

$$\sqrt{\sum_{l=1}^L \min[0, \alpha^{l\top} x - \beta_l]^2} \leq s.$$